Nouvelles annales de mathématiques

Juhel-Rénoy

Sur la section d'une surface par un plan bitangent

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 282-287

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__282_1>

SUR LA SECTION D'UNE SURFACE PAR UN PLAN BITANGENT;

Par M. JUHEL-RÉNOY.

Théorème I. — *Soit une surface du quatrième degré, symétrique par rapport à trois plans rectangu-*

laires et présentant un cône de directions asymptotiques double : cette surface est coupée par un plan bitangent suivant deux coniques.

Soit, en effet,

$$(Ax^2 + By^2 + Cz^2)^2 + 2(Dx^2 + Ey^2 + Fz^2) + H^2 = 0$$

l'équation de la surface S par rapport aux plans de symétrie. Désignons par α l'angle du plan xOy et du plan tangent mené par le centre perpendiculairement au plan xOz. Nous aurons la relation

$$H^2(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^2 = (D\cos^2\alpha + F\sin^2)^2.$$

L'équation de la section de la surface par son plan bitangent s'obtiendra en remplaçant dans l'équation de la surface x par $x\cos\alpha$ et z par $x\sin\alpha$. Cette équation sera

$$\begin{aligned}(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^4 x^2 \\ + 2[(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)By^2 + D\cos^2\alpha + F\sin^2\alpha]x^2 \\ + B^2y^4 + 2Ey^2 + H^2 = 0.\end{aligned}$$

Résolvons cette équation par rapport à x^2, en tenant compte de la relation qui donne la valeur de α, il vient

$$\begin{aligned}(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^2 x^2 \\ + (A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)By^2 + D\cos^2\alpha + F\sin^2\alpha = \pm Ky.\end{aligned}$$

La section se compose donc de deux coniques, ayant pour axe l'axe Oy.

Théorème II. — *Toute quadrique bitangente à la surface* S *et présentant le même cône de directions asymptotiques coupe la surface* S *suivant deux coniques.*

Soient, en effet, a, b, a', b' les points d'intersection de la surface S avec l'axe Ox et supposons que la quadrique passe par les points b et a'. Son équation sera

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2x\sqrt{\frac{-(D + AH)}{2}} - H = 0.$$

Cherchons l'intersection de cette quadrique avec la surface S. Pour cela, remplaçons dans l'équation de la surface $Ax^2 + By^2 + Cz^2$ par

$$2x\sqrt{\frac{-(D+AH)}{2}} + H.$$

Il vient

$$Ey^2 + Fz^2 - H\left[Ax^2 - 2x\sqrt{\frac{-(D+AH)}{2}} - H\right] = 0:$$

d'où

$$(E + BH)y^2 + (F + CH)z^2 = 0.$$

C'est l'équation de deux plans perpendiculaires au plan zOy et bitangents à la surface S.

Ce théorème permet de déterminer la nature des coniques C suivant lesquelles la surface S est coupée par son plan bitangent. Dans le cas où la surface S est de révolution, autour de l'axe des z par exemple, la détermination du centre de la conique C et de la longueur de l'axe suivant Oy est facile. Supposons d'abord que la conique C soit une ellipse. Cette ellipse doit couper la trace du plan bitangent sur le plan zOx et elle doit couper l'axe Ox à des distances de O égales à Ob et Oa'. La longueur de son axe suivant Oy est donc ba' et son centre est à une distance de O égale à la moitié de ab. Si c représente le milieu de ab, le demi-axe suivant Oy est égal au rayon moyen Oc de la surface et le centre est à une distance de O égale à ac. Si, au contraire, la conique C est une hyperbole, son axe est égal à ab et son centre est à une distance de O égale à Oc.

Conséquences. — Si la surface S est de révolution et si la courbe méridienne passe par les points cycliques du plan, les courbes C sont des cercles. Ainsi la section du tore par un plan bitangent ou par une sphère bitangente se compose de deux cercles.

La surface de révolution engendrée par la courbe Σ, lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant, tournant autour de son axe non focal, est coupée par un plan bitangent ou par une sphère bitangente suivant deux cercles.

Nous terminerons cette Note par la *construction des tangentes au point double de la section de la surface* S *par un plan bitangent, au cas où la surface* S *est de révolution.*

Soient (o', o) le centre de la surface, $P'\alpha P$ le plan bitangent et (m', m) le point de contact. Supposons que la section se compose de deux ellipses et rabattons-la sur le plan vertical passant par l'axe. Le centre d'une des ellipses vient en un point d, tel que $o'd = ac$, sur la perpendiculaire en o' à $P'\alpha$, et son demi-axe est

$$de = de' = o'c.$$

Soit $m'g$ le rabattement de la tangente. On a la relation

$$do'.dg = de^2 \qquad \text{ou} \qquad ac.dg = \overline{o'c}^2.$$

Sur ab, comme diamètre, décrivons un cercle; soit f le point de contact de la tangente menée de o' à ce cercle, et soit h le point de rencontre de $o'o$ avec cf; on a

$$\overline{o'c}^2 = ac.ch.$$

Donc

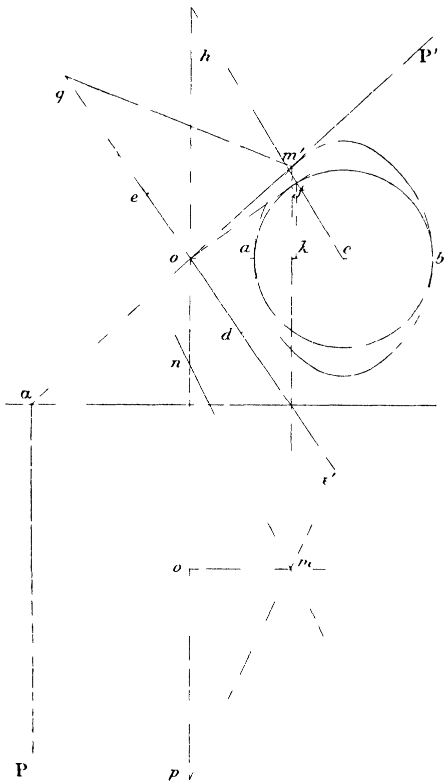
$$dg = ch, \qquad \text{d'où} \qquad o'g = fh.$$

La construction est donc la suivante :

Sur ab comme diamètre, décrire un cercle; mener du point o' une tangente à ce cercle; tracer cf perpendiculaire à $o'f$, qui coupe le cercle en f et oo' en h, et prendre sur oo', à partir du point o, les longueurs $on = op = fh$.

Les tangentes au point double sont les droites mn et mp.

Dans le cas du tore en particulier, la construction est des plus simples. Le point f se confondant avec le point



m', il suffit de tracer cm' que coupe ao' en h, de prendre à partir du point o sur oo' les longueurs $on = op = m'h$ et de joindre mn et mp, qui sont les tangentes au point double. Le problème de la construction des tangentes au point double de la section du tore par son plan tangent a déjà été traité dans les *Nouvelles Annales*, par M. Doucet, qui a donné une construction un peu plus compliquée que la précédente (*Nouvelles Annales*, septembre 1884).

Nous avons supposé pour la construction que la section se composait de deux ellipses. Si elle se composait de deux hyperboles, la construction serait la suivante :

Sur ab comme diamètre, décrire un cercle; projeter en k sur ab le point de contact f de la tangente menée de o' à ce cercle; prendre sur oo' à partir du point o les longueurs $on = op = o'k$ et joindre mn et mp.