NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

T.-J. STIELTJES

Sur une généralisation de la formule des accroissements finis

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 26-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__26_0>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

1. M. H. A. Schwarz a donné, dans les *Annali di Matematica* de Brioschi (série II, t. X), le théorème suivant :

Soient $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ des fonctions réelles d'une même variable réelle t. On suppose que ces fonctions, de même que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, sont finies et continues.

Dans ces conditions, si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont n valeurs différentes appartenant à l'intervalle $a, \ldots, b$, le quotient

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \ldots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \ldots & f_n(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \ldots & f_n(t_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas plus grand que $\dfrac{\mathrm{M}}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}$ *et pas plus petit que* $\dfrac{m}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}$, M *désignant la plus grande, m la plus petite des valeurs du déterminant*

$$\begin{vmatrix} f_1(t') & f_2(t') & \ldots & f_n(t') \\ f'_1(t'') & f'_2(t'') & \ldots & f'_n(t'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix},$$

sous les conditions

$$a \leq t' \leq b, \quad t' \leq t'' \leq b, \quad t'' \leq t''' \leq b, \quad \ldots \quad t^{(n-1)} \leq t^{(n)} \leq b$$

Comme le remarque M. Schwarz, ce théorème permet d'établir, d'une manière rigoureuse, certaines propositions fondamentales dans la théorie des courbes planes ou gauches. Soit, par exemple, M un point d'une courbe gauche, et prenons sur cette courbe trois points infiniment voisins de M. Le plan osculateur en M est la position limite du plan qui passe par les trois derniers points. A l'aide du théorème de M. Schwarz, on reconnaît aussi clairement les conditions dans lesquelles cette proposition est exacte.

2. La démonstration que M. Schwarz a donnée de son théorème est extrêmement simple. La circonstance qu'elle exige des intégrations nous a conduit à chercher si l'on ne pourrait pas arriver au but d'une manière plus élémentaire.

Nous avons reconnu alors que le quotient considéré est égal à

$$\frac{1}{1!2!3!\ldots(n-1)!}\begin{vmatrix} f_1(t') & f_2(t') & \ldots & f_n(t') \\ f'_1(t'') & f'_2(t'') & \ldots & f'_n(t'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} t' &= t_1, \\ t'' &= (t_1, t_2), \\ t''' &= (t_1, t_2, t_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t^{(n)} &= (t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{aligned}$$

$(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ désignant un nombre compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

3. La démonstration de ce théorème s'appuie principalement sur le lemme suivant.

Si une fonction $f(t)$ s'annule pour n valeurs différentes de la variable

$$f(t_1) = 0, \qquad f(t_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad f(t_n) = 0,$$

alors on a

$$f^{(n-1)}(\xi) = 0,$$

où

$$\xi = (t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Il faut supposer que la fonction $f(t)$ admet des dérivées $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{n-2}(t)$ qui sont finies et continues et que $f^{n-2}(t)$ admet encore une dérivée finie $f^{n-1}(t)$, mais on n'a pas à supposer que $f^{n-1}(t)$ soit continue.

En effet, soit, par exemple, $n = 3$ et

$$t_1 < t_2 < t_3.$$

Ayant

$$f(t_1) = 0, \qquad f(t_2) = 0, \qquad f(t_3) = 0,$$

on en conclut d'abord

$$f'(t') = 0, \qquad f'(t'') = 0,$$

t' étant compris entre t_1 et t_2 (en excluant les limites), et t'' entre t_2 et t_3. Ayant donc

$$t' < t'',$$

on voit ensuite que la fonction $f''(t)$ doit s'annuler pour une valeur de la variable comprise entre t' et t'', valeur qui sera comprise aussi entre t_1 et t_3.

4. En s'appuyant sur ce lemme, la démonstration du théorème énoncé est très facile. Nous supposerons $n = 4$, et posons

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = A.$$

Considérons la fonction

$$F(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix} A$$

Il est clair qu'on a identiquement

$$F(x) = 0, \qquad F(y) = 0, \qquad F(z) = 0,$$

et encore, à cause de la valeur A,

$$F(t) = 0.$$

On en conclut

$$F'''(\zeta) = 0,$$

où

$$\zeta = (x, y, z, t),$$

ce qui revient à

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} A = 0.$$

Soit maintenant

$$\mathcal{G}(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & u & u^2 \end{vmatrix} A.$$

Il est donc clair qu'on a

$$\mathcal{G}(x) = 0, \qquad \mathcal{G}(y) = 0, \qquad \mathcal{G}(z) = 0;$$

donc

$$\mathcal{G}''(\eta) = 0,$$

où

$$\eta = (x, y, z).$$

On a, par conséquent,

$$(3)\quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} A = 0.$$

Considérons enfin la fonction

$$\mathfrak{Z}(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & u \end{vmatrix} A.$$

Il est clair qu'on a

$$\mathfrak{Z}(x) = 0, \qquad \mathfrak{Z}(y) = 0;$$

donc

$$\mathfrak{Z}'(\xi) = 0,$$

où

$$\xi = (x, y).$$

Or cela revient à

$$(4)\quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.1.2.1.2.3\, A = 0,$$

ce qui est l'expression du théorème annoncé.

On remarquera que cette démonstration suppose seulement que les dérivées secondes

$$f''(t), \quad g''(t), \quad h''(t), \quad k''(t)$$

admettent des dérivées

$$f'''(t), \quad g'''(t), \quad h'''(t), \quad k'''(t);$$

mais il n'est pas nécessaire de supposer que ces dernières fonctions soient continues.

Mais, si l'on ajoute cette dernière condition [la continuité de $f''''(t)$, $g''''(t)$, $h''''(t)$, $k''''(t)$], on conclut directement que, si x, y, z, t tendent vers une même limite a, on a

$$\lim A = \frac{1}{1.1.2.1.2.3} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}.$$