

T.-J. STIELTJES

**Sur une généralisation de la formule  
des accroissements finis**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 7  
(1888), p. 26-31

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1888\\_3\\_7\\_26\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7_26_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE  
DES ACCROISSEMENTS FINIS;**

PAR M. T.-J. STIELTJES.

1. M. H. A. Schwarz a donné, dans les *Annali di Matematica* de Brioschi (série II, t. X), le théorème suivant :

Soient  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  des fonctions réelles d'une même variable réelle  $t$ . On suppose que ces fonctions, de même que leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n - 1$  inclusivement, sont finies et continues.

Dans ces conditions, si  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sont  $n$  valeurs différentes appartenant à l'intervalle  $a, \dots, b$ , le quotient

$$\left| \begin{array}{cccc} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_n(t_n) \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{array} \right|$$

n'est pas plus grand que  $\frac{M}{1!2!3! \dots (n-1)!}$  et pas plus petit que  $\frac{m}{1!2!3! \dots (n-1)!}$ ,  $M$  désignant la plus grande,  $m$  la plus petite des valeurs du déterminant

$$\left| \begin{array}{cccc} f_1(t') & f_2(t') & \dots & f_n(t') \\ f_1(t'') & f_2(t'') & \dots & f_n(t'') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \dots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{array} \right|,$$

sous les conditions

$$a \leq t' \leq b, \quad t \sim t'' \sim b, \quad t'' \sim t''' \sim b, \quad \dots, \quad t^{(n-1)} \geq t^{(n)} \sim b$$

Comme le remarque M. Schwarz, ce théorème permet d'établir, d'une manière rigoureuse, certaines propositions fondamentales dans la théorie des courbes planes ou gauches. Soit, par exemple, M un point d'une courbe gauche, et prenons sur cette courbe trois points infiniment voisins de M. Le plan osculateur en M est la position limite du plan qui passe par les trois derniers points. A l'aide du théorème de M. Schwarz, on reconnaît aussi clairement les conditions dans lesquelles cette proposition est exacte.

2. La démonstration que M. Schwarz a donnée de son théorème est extrêmement simple. La circonstance qu'elle exige des intégrations nous a conduit à chercher si l'on ne pourrait pas arriver au but d'une manière plus élémentaire.

Nous avons reconnu alors que le quotient considéré est égal à

$$\frac{1}{1!2!3!\dots(n-1)!} \begin{vmatrix} f_1(t') & f_2(t') & \dots & f_n(t') \\ f_1'(t'') & f_2'(t'') & \dots & f_n'(t'') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \dots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} t' &= t_1, \\ t'' &= (t_1, t_2), \\ t''' &= (t_1, t_2, t_3), \\ &\dots\dots\dots, \\ t^{(n)} &= (t_1, t_2, \dots, t_n), \end{aligned}$$

$(t_1, t_2, \dots, t_k)$  désignant un nombre compris entre le plus petit et le plus grand des nombres  $t_1, t_2, \dots, t_k$ .

3. La démonstration de ce théorème s'appuie principalement sur le lemme suivant.

Si une fonction  $f(t)$  s'annule pour  $n$  valeurs diffé-

rentes de la variable

$$f(t_1) = 0, \quad f(t_2) = 0, \quad \dots, \quad f(t_n) = 0,$$

alors on a

$$f^{(n-1)}(\xi) = 0,$$

où

$$\xi = (t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Il faut supposer que la fonction  $f(t)$  admet des dérivées  $f'(t)$ ,  $f''(t)$ , ...,  $f^{n-2}(t)$  qui sont finies et continues et que  $f^{n-2}(t)$  admet encore une dérivée finie  $f^{n-1}(t)$ , mais on n'a pas à supposer que  $f^{n-1}(t)$  soit continue.

En effet, soit, par exemple,  $n = 3$  et

$$t_1 < t_2 < t_3.$$

Ayant

$$f(t_1) = 0, \quad f(t_2) = 0, \quad f(t_3) = 0,$$

on en conclut d'abord

$$f'(t') = 0, \quad f'(t'') = 0,$$

$t'$  étant compris entre  $t_1$  et  $t_2$  (en excluant les limites), et  $t''$  entre  $t_2$  et  $t_3$ . Ayant donc

$$t' < t'',$$

on voit ensuite que la fonction  $f''(t)$  doit s'annuler pour une valeur de la variable comprise entre  $t'$  et  $t''$ , valeur qui sera comprise aussi entre  $t_1$  et  $t_3$ .

4. En s'appuyant sur ce lemme, la démonstration du théorème énoncé est très facile. Nous supposons  $n = 4$ , et posons

$$(1) \quad \left| \begin{array}{cccc} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{array} \right| = \Lambda.$$

Considérons la fonction

$$F(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix} \Lambda$$

Il est clair qu'on a identiquement

$$F(x) = 0, \quad F(y) = 0, \quad F(z) = 0,$$

et encore, à cause de la valeur  $\Lambda$ ,

$$F(t) = 0.$$

On en conclut

$$F'''(\zeta) = 0,$$

où

$$\zeta = (x, y, z, t),$$

ce qui revient à

$$(2) \quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \Lambda = 0.$$

Soit maintenant

$$\mathcal{G}(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & u & u^2 \end{vmatrix} \Lambda.$$

Il est donc clair qu'on a

$$\mathcal{G}(x) = 0, \quad \mathcal{G}(y) = 0, \quad \mathcal{G}(z) = 0;$$

donc

$$\mathcal{G}''(\tau) = 0,$$

où

$$\tau = (x, y, z).$$

On a, par conséquent,

$$(3) \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f''(\tau_1) & g''(\tau_1) & h''(\tau_1) & k''(\tau_1) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} \Lambda = 0.$$

Considérons enfin la fonction

$$\mathfrak{J}(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f''(\tau_1) & g''(\tau_1) & h''(\tau_1) & k''(\tau_1) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & u \end{vmatrix} \Lambda.$$

Il est clair qu'on a

$$\mathfrak{J}(x) = 0, \quad \mathfrak{J}(y) = 0;$$

donc

$$\mathfrak{J}'(\xi) = 0,$$

où

$$\xi = (x, y).$$

Or cela revient à

$$(4) \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\tau_1) & g''(\tau_1) & h''(\tau_1) & k''(\tau_1) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.1.2.1.2.3 \Lambda = 0,$$

ce qui est l'expression du théorème annoncé.

On remarquera que cette démonstration suppose seulement que les dérivées secondes

$$f''(t), \quad g''(t), \quad h''(t), \quad k''(t)$$

admettent des dérivées

$$f'''(t), \quad g'''(t), \quad h'''(t), \quad k'''(t);$$

mais il n'est pas nécessaire de supposer que ces dernières fonctions soient continues.

Mais, si l'on ajoute cette dernière condition [la conti-

( 31 )

nuité de  $f'''(t)$ ,  $g'''(t)$ ,  $h'''(t)$ ,  $k'''(t)$ ], on conclut directement que, si  $x, y, z, t$  tendent vers une même limite  $a$ , on a

$$\lim A = \frac{1}{1.1.2.1.2.3} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}.$$

---

---