E. CESÀRO

Sur la potentielle triangulaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 257-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__257_0>

SUR LA POTENTIELLE TRIANGULAIRE;

PAR M. E. CESARO.

Soient A_1, A_2, A_3 les sommets d'un triangle, dans l'ordre où ils sont rencontrés par un mobile, qui parcourt le périmètre en laissant le triangle à sa gauche. Soient μ_1, μ_2, μ_3 les coordonnées barycentriques d'un point P. Si x_i, y_i sont les coordonnées de A_i, par rapport à deux axes orthogonaux, issus de P, on a par définition

$$(1)\qquad \sum \mu_i x_i = 0,$$

$$(2)\qquad \sum \mu_i y_i = 0,$$

les sommes devant être étendues aux indices 1, 2, 3. Le double de l'aire du triangle étant

$$(3)\qquad \sum (x_2 y_3 - x_3 y_2) = a^2,$$

on déduit de (1) et (2)

$$(4)\qquad \frac{\mu_1}{x_2 y_3 - x_3 y_2} = \frac{\mu_2}{x_3 y_1 - x_1 y_3} = \frac{\mu_3}{x_1 y_2 - x_2 y_1} = \frac{1}{a^2};$$

μ_1, μ_2, μ_3 représentent donc les rapports des aires des triangles PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2, à l'aire de $A_1A_2A_3$. Rappelons, enfin, que l'élément linéaire, en coordonnées barycentriques, est donné par la formule

$$(5)\qquad ds^2 = a^2(\cot A_1\, d\mu_1^2 + \cot A_2\, d\mu_2^2 + \cot A_3\, d\mu_3^2).$$

Supposons que les coordonnées barycentriques de P dépendent d'un paramètre n. Lorsque celui-ci varie, le point considéré décrit une ligne (P). Si l'on prend comme axes la tangente et la normale à (P), en P, les dérivées des coordonnées de A_i, par rapport à l'arc s, sont

$$(6)\qquad x'_i = \frac{y_i - \rho}{\rho}, \qquad y'_i = -\frac{x_i}{\rho}.$$

Cela posé, remarquons que l'on a

$$(7)\qquad \sum \mu_i = 1, \qquad \sum \mu'_i = \sum \mu''_i = \ldots = 0,$$

et différentions les égalités (1) et (2), en tenant compte de (6). Il vient

$$(8)\qquad \sum \mu'_i x_i = 1,$$

$$(9)\qquad \sum \mu'_i y_i = 0;$$

puis, par une nouvelle dérivation,

$$(10)\qquad \sum \mu''_i x_i = 0,$$

$$(11)\qquad \sum \mu''_i y_i = \frac{1}{\rho}.$$

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu'_1 & \mu''_1 \\ \mu_2 & \mu'_2 & \mu''_2 \\ \mu_3 & \mu'_3 & \mu''_3 \end{vmatrix}.$$

Il est évident, à cause de (7), que

$$(12)\qquad \Delta = \mu'_2 \mu''_3 - \mu'_3 \mu''_2 = \mu'_3 \mu''_1 - \mu'_1 \mu''_3 = \mu'_1 \mu''_2 - \mu'_2 \mu''_1.$$

Cela étant, les formules (1) et (10) donnent, en ayant égard à (8),

$$(13)\qquad \frac{x_1}{\mu_2 \mu''_3 - \mu_3 \mu''_2} = \frac{x_2}{\mu_3 \mu''_1 - \mu_1 \mu''_3} = \frac{x_3}{\mu_1 \mu''_2 - \mu_2 \mu''_1} = -\frac{1}{\Delta}.$$

De même, les égalités (2) et (9) donnent, en ayant égard à (11),

$$\frac{y_1}{\mu_2\mu'_3 - \mu_3\mu'_2} = \frac{y_2}{\mu_3\mu'_1 - \mu_1\mu'_3} = \frac{y_3}{\mu_1\mu'_2 - \mu_2\mu'_1} = \frac{1}{\rho\Delta}. \tag{14}$$

Les formules (12), (13), (14) font connaître les mineurs de Δ : elles nous disent que le réciproque de ce déterminant est, en vertu de (3),

$$\begin{vmatrix} \Delta & x_1\Delta & y_1\rho\Delta \\ \Delta & x_2\Delta & y_2\rho\Delta \\ \Delta & x_3\Delta & y_3\rho\Delta \end{vmatrix} = a^2\rho\Delta^3.$$

On sait, d'autre part, que le réciproque en question est égal à Δ^2. Donc

$$a^2\rho\Delta = 1. \tag{15}$$

Nous avons là une relation entre ρ, n, n' ; car, si l'on pose

$$\varphi(n) = \begin{vmatrix} \mu_1 & \dfrac{d\mu_1}{dn} & \dfrac{d^2\mu_1}{dn^2} \\ \mu_2 & \dfrac{d\mu_2}{dn} & \dfrac{d^2\mu_2}{dn^2} \\ \mu_3 & \dfrac{d\mu_3}{dn} & \dfrac{d^2\mu_3}{dn^2} \end{vmatrix},$$

il est évident que

$$\Delta = n'^3\varphi(n). \tag{16}$$

D'autre part, si l'on fait, pour abréger,

$$\psi(n) = \sqrt{\left(\frac{d\mu_1}{dn}\right)^2 \cot\Lambda_1 + \left(\frac{d\mu_2}{dn}\right)^2 \cot\Lambda_2 + \left(\frac{d\mu_3}{dn}\right)^2 \cot\Lambda_3}, \tag{17}$$

on a, d'après (5),

$$an'\psi(n) = 1; \tag{18}$$

puis, par substitutions successives dans (16) et (15),

$$\rho = a\frac{\psi^3(n)}{\varphi(n)}. \tag{19}$$

En outre, l'intégration de (18) nous donne

$$(20) \qquad s = a \int \psi(n)\,dn.$$

L'élimination de n entre (19) et (20) conduit à l'équation intrinsèque de (P).

Lorsque les coordonnées barycentriques de P sont proportionnelles aux $n^{\text{ièmes}}$ puissances des côtés correspondants, la ligne (P) prend le nom de *potentielle triangulaire*. Cette courbe a été étudiée par MM. Faure, Lemoine, Brocard, de Longchamps. Nous allons l'étudier à notre tour, en établissant par la géométrie intrinsèque quelques propriétés connues et beaucoup d'autres nouvelles.

Evidemment, la courbe dont il s'agit n'a pas de points hors du triangle, tant que n est réel. Elle contient toujours le barycentre du triangle, le centre du cercle inscrit, le point de Lemoine, les sommets opposés au plus grand et au plus petit côté, etc. A ces points correspondent respectivement, pour n, les valeurs 0, 1, 2, ∞, $-\infty$, etc. C'est ce que l'on vérifie sans peine en observant que, dans le cas actuel,

$$(21) \qquad \frac{\mu_1}{c_1^n} = \frac{\mu_2}{c_2^n} = \frac{\mu_3}{c_3^n} = \frac{1}{c_1^n + c_2^n + c_3^n},$$

c_i étant la longueur du côté opposé à A_i.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\alpha = \sum c_i^n, \qquad \beta = \sum c_i^n \log c_i, \qquad \gamma = \sum c_i^n \log^2 c_i,$$

on a

$$(22) \qquad \alpha^2 \frac{d\mu_1}{dn} = (\alpha \log c_1 - \beta)\, c_1^n, \qquad \ldots.$$

$$(23) \qquad \alpha^3 \frac{d^2\mu_1}{dn^2} = [(\alpha \log c_1 - \beta)^2 + \beta^2 - \alpha\gamma]\, c_1^n \qquad \ldots.$$

Par suite,

$$\alpha^6 \varphi(n) = (c_1 c_2 c_3)^n \begin{vmatrix} 1 & \alpha \log c_1 - \beta & (\alpha \log c_1 - \beta)^2 + \beta^2 - \alpha\gamma \\ 1 & \alpha \log c_2 - \beta & (\alpha \log c_2 - \beta)^2 + \beta^2 - \alpha\gamma \\ 1 & \alpha \log c_3 - \beta & (\alpha \log c_3 - \beta)^2 + \beta^2 - \alpha\gamma \end{vmatrix};$$

d'où

$$\varphi(n) = \lambda \frac{(c_1 c_2 c_3)^n}{\alpha^3}, \tag{24}$$

pourvu que l'on pose

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & \log c_1 & \log^2 c_1 \\ 1 & \log c_2 & \log^2 c_2 \\ 1 & \log c_3 & \log^2 c_3 \end{vmatrix}.$$

De même, si

$$\varepsilon_1 = \log \frac{c_2}{c_3}, \qquad \varepsilon_2 = \log \frac{c_3}{c_1}, \qquad \varepsilon_3 = \log \frac{c_1}{c_2},$$

et

$$\mathrm{H}^2 = \sum (\varepsilon_2 c_2{}^n - \varepsilon_3 c_3{}^n)^2 \cot \mathrm{A}_1, \tag{25}$$

la relation (17) donne

$$\psi(n) = \mathrm{H} \frac{(c_1 c_2 c_3)^n}{\alpha^2}. \tag{26}$$

Cela étant, les formules (19) et (20) deviennent, en vertu de (24) et (26),

$$\rho = \frac{\alpha}{\lambda} (c_1 c_2 c_3)^{2n} \left(\frac{\mathrm{H}}{\alpha}\right)^3, \tag{27}$$

$$s = a \int (c_1 c_2 c_3)^n \frac{\mathrm{H}\, dn}{\alpha^2}. \tag{28}$$

L'élimination de n entre (27) et (28) donnerait l'équation intrinsèque de la potentielle triangulaire. Si $c_1 > c_2 > c_3$, la potentielle s'étend depuis A_3 jusqu'à A_1, à l'intérieur du triangle, lorsque n varie de $-\infty$ à $+\infty$. Pour voir comment se comporte la courbe aux environs de ses extrémités, il suffit de voir ce que devient (27) pour des valeurs de n, indéfiniment grandes en valeur absolue. On remarquera d'abord que $x c_2^{-n}$ croît toujours à l'infini, asymptotiquement à $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^n$ ou à $\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^n$, suivant que n est positif ou négatif. La discussion de H, au moyen de (25), montre ensuite que le second membre de (27) tend à prendre une des formes

$$(29) \qquad \frac{(\varepsilon_3 c_3)^3}{\lambda a^2} \lim \left(\frac{c_2^2}{c_1 c_3}\right)^n, \qquad \frac{(\varepsilon_1 c_1)^3}{\lambda a^2} \lim \left(\frac{c_2^2}{c_1 c_3}\right)^n,$$

suivant que n est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que le point P tend vers A_1 ou vers A_3. Soient r et R les valeurs de ρ en ces points. Si $c_2^2 < c_1 c_3$, on a, d'après (29), $r = 0$, $R = \infty$. Si $c_2^2 > c_1 c_3$, on a $r = \infty$, $R = 0$. Il y a donc deux classes de triangles, bien distinctes au point de vue de leurs potentielles. Ces classes sont nettement séparées par les triangles dont les côtés sont en progression géométrique, et qu'on appelle *triangles moyens*. En effet, pour $c_2^2 = c_1 c_3$, les expressions (29) deviennent

$$(30) \qquad r = \frac{(\varepsilon_3 c_3)^3}{\lambda a^2}, \qquad R = \frac{(\varepsilon_1 c_1)^3}{\lambda a^2}.$$

En outre, dans le cas actuel,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_2, \qquad \lambda = \tfrac{1}{4}\varepsilon_3^2.$$

Par suite, les formules (30) donnent, aux signes près,

$$r = \frac{c_3^3}{2a^2}, \qquad R = \frac{c_1^3}{2a^2}.$$

Ainsi, dans tout triangle moyen, les courbures de la potentielle, aux extrémités du côté moyen, sont proportionnelles aux cubes des côtés opposés. On peut encore écrire

$$2 r h_3 = c_3^2, \qquad 2 R h_1 = c_1^2,$$

h_i étant la hauteur issue de A_i. Cela donne lieu à une construction fort simple. On remarquera que la moyenne géométrique des diamètres des cercles osculateurs, aux extrémités de côté moyen, est égale à la distance de ce côté à l'orthocentre.

Afin de connaître la direction de la courbe, en chacun de ses points, il convient de reprendre les formules (14), qui deviennent, en vertu de (15) et (18),

$$y_1 = \frac{a}{\psi(n)}\left(\mu_2 \frac{d\mu_3}{dn} - \mu_3 \frac{d\mu_2}{dn}\right), \qquad \cdots$$

Dans le cas de la potentielle, ces formules donnent, aux signes près,

$$(31) \qquad \frac{y_1}{\varepsilon_1 c_1^{-n}} = \frac{y_2}{\varepsilon_2 c_2^{-n}} = \frac{y_3}{\varepsilon_3 c_3^{-n}} = \frac{a}{\mathrm{H}},$$

pourvu que l'on ait égard aux formules (21), (22), (26). Si n croît indéfiniment, en valeur absolue, on a, en vertu des considérations asymptotiques indiquées précédemment,

$$y_i = \frac{\varepsilon_i a^2}{\varepsilon_3 c_3} \lim \left(\frac{c_3}{c_i}\right)^n \qquad \text{ou} \qquad y_i = \frac{\varepsilon_i a^2}{\varepsilon_1 c_1} \lim \left(\frac{c_1}{c_i}\right)^n,$$

suivant que n est positif ou négatif. Il en résulte

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = \frac{a^2}{c_3} = h_3, \qquad \text{en } \mathrm{A}_1;$$

$$y_3 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_1 = \frac{a^2}{c_1} = h_1, \qquad \text{en } \mathrm{A}_3.$$

La potentielle touche donc les côtés extrêmes du triangle aux extrémités du côté moyen. Elle se dirige parallèlement à ce côté lorsque $y_1 = y_3$, c'est-à-dire d'après (31), pour

$$n = \frac{1}{\varepsilon_2} \log \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

En particulier, pour les triangles moyens, $n = 0$, ce qui définit le barycentre.

On doit être curieux de connaître la nature de la potentielle dans les triangles moyens. Dans ce but, remarquons que l'on a identiquement

$$\sum \varepsilon_1 \log c_1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} c_3^{\varepsilon_3} = 1.$$

Par suite, les formules (21) donnent

$$\mu_1^{\varepsilon_1} \mu_2^{\varepsilon_2} \mu_3^{\varepsilon_3} = 1. \tag{32}$$

Telle est l'équation barycentrique de la potentielle. Elle devient, pour les triangles moyens, $\mu_2^2 = \mu_1 \mu_3$. C'est une équation homogène, du second degré, qui représente donc une conique. Bien entendu, la courbe doit être limitée à l'arc intérieur au triangle; mais nous verrons que l'arc extérieur fait également partie du lieu, à la condition d'admettre pour n des valeurs imaginaires, convenablement choisies.

Il y aurait une intéressante transformation à étudier dans le plan. Soit q_i la longueur du segment intercepté sur une droite D, à partir d'un point Q, par le côté opposé à A_i. Déterminons Q de manière que

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_2} + \frac{\varepsilon_3}{q_3} = 0.$$

La droite D se mouvant dans le plan, soit P le point où elle touche son enveloppe. Par rapport à la tangente et à la normale à (P), en P, les coordonnées de Q sont faciles à calculer ; l'ordonnée est nulle, et l'abscisse est donnée par l'équation

$$\frac{\varepsilon_1}{p_1 - x} + \frac{\varepsilon_2}{p_2 - x} + \frac{\varepsilon_3}{p_3 - x} = 0,$$

qui est vérifiée par une seule valeur finie de x, à savoir

$$x = \frac{\sum \varepsilon_1 p_2 p_3}{\sum \varepsilon_1 p_1},$$

Les quantités p représentent les *abscisses à l'origine* des côtés du triangle fixe. Connaissant les coordonnées de Q, il serait facile d'étudier, par les méthodes intrinsèques, la correspondance des lignes (P) et (Q). Ici nous nous bornons à faire observer que la potentielle triangulaire coïncide avec sa transformée. En effet, pour que, sur D, Q coïncide avec P, il faut que l'on ait

$$(33) \qquad \frac{\varepsilon_1}{p_1} + \frac{\varepsilon_2}{p_2} + \frac{\varepsilon_3}{p_3} = 0.$$

D'ailleurs,

$$p_1 = -\frac{a^2 \mu_1}{y_2 - y_3}, \qquad p_2 = -\frac{a^2 \mu_2}{y_3 - y_1}, \qquad p_3 = -\frac{a^2 \mu_3}{y_1 - y_2},$$

et la dérivation des formules (4) donne, en vertu de (6),

$$a^2 \mu'_1 = y_2 - y_3, \qquad a^2 \mu'_2 = y_3 - y_1, \qquad a^2 \mu'_3 = y_1 - y_2,$$

de sorte que

$$\frac{d}{ds} \log \mu_i = -\frac{1}{p_i}.$$

Conséquemment, l'égalité (33) se change, par intégration, en (32), pour une valeur convenable de la constante arbitraire. Pour les triangles moyens la relation (33) exprime que le segment intercepté par les côtés extrêmes, sur toute tangente à la potentielle, est partagé harmoniquement par le point de contact et par le point de rencontre avec le côté moyen. Cette propriété est évidente, si l'on réfléchit que la potentielle étant, dans le cas actuel, une conique, le côté moyen est la polaire du côté opposé.

La potentielle peut se prolonger au dehors du triangle pour des valeurs imaginaires de n. Changeons n en $n + k\sqrt{-1}$, et voyons ce qu'il faut pour que les coordonnées μ restent réelles. Si u et ω sont le module et l'argument de α, on a, d'après (21),

$$u\mu_i = c_i^n e^{(\omega_i - \omega)\sqrt{-1}},$$

ω_i étant l'argument de $c_i^{k\sqrt{-1}}$. Il en résulte que $\omega_i - \omega$ doit être un multiple de π. Soit $\omega_i - \omega = m_i \pi$, et, par suite,

$$u\mu_i = (-1)^{m_i} c_i^n,$$

c'est-à-dire

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mu_1}{(-1)^{m_1} c_1^n} &= \frac{\mu_2}{(-1)^{m_2} c_2^n} = \frac{\mu_3}{(-1)^{m_3} c_3^n} \\ &= \frac{1}{(-1)^{m_1} c_1^n + (-1)^{m_2} c_2^n + (-1)^{m_3} c_3^n}. \end{aligned} \right.$$

On peut toujours supposer que tous les nombres m soient pairs, ou qu'un seul d'entre eux soit impair. Dans le premier cas, on retombe sur les équations (21) : dans le second, on n'a qu'à changer, dans ces équations, le signe de μ_ν, m_ν étant impair. Le point Q, représenté par les équations (34), est alors dans une relation simple avec le point P, représenté par (21). Ces points sont sur une droite issue de A_ν, et ils divisent harmoniquement le segment de cette droite, intercepté, à partir du sommet, par le côté opposé. Il nous reste à connaître la valeur de ν. Remarquons, dans ce but, que ω_i ne diffère pas de $k \log c_i$, et, par suite,

$$k\varepsilon_1 = \omega_2 - \omega_3 = (m_2 - m_3)\pi, \qquad \ldots.$$

Il faut donc, avant tout, que les nombres ε aient entre eux des rapports commensurables. Si cela a lieu, on peut trouver trois nombres entiers, r_1, r_2, r_3, premiers entre eux, tels que

$$\varepsilon_1 = r_1\varepsilon, \qquad \varepsilon_2 = r_2\varepsilon, \qquad \varepsilon_3 = r_3\varepsilon,$$

et l'on a

$$\frac{r_1}{m_2 - m_3} = \frac{r_2}{m_3 - m_1} = \frac{r_3}{m_1 - m_2} = \frac{\pi}{k\varepsilon}.$$

Un seul des nombres r est pair : c'est r_ν. Lorsque les rapports mutuels des nombres ε sont commensurables, il existe entre les côtés du triangle une relation de la forme

$$c_1^{r_1} c_3^{r_3} = c_2^{r_1+r_3}. \tag{35}$$

On a donc $\nu = 2$ lorsque r_1 et r_3 sont impairs : $\nu = 1$, pour r_1 pair et r_3 impair : $\nu = 3$, pour r_1 impair et r_3 pair. Ainsi, l'indice ν est connu, dès que la relation (35) est donnée.

Lors donc que la détermination des nombres r est possible, la courbe admet des boucles (Q), extérieures au triangle, qui se déduisent de la boucle intérieure (P) par une transformation homologique harmonique, dont le pôle et l'axe sont respectivement le sommet A_ν et le côté opposé. Evidemment, pour $\nu = 2$, on obtient une boucle analogue à (P), tournée en sens inverse, et se raccordant avec (P) aux extrémités du côté moyen. Les deux boucles constituent ainsi une espèce d'ovale, qui devient une ellipse pour $r_1 = r_3$. La forme de la courbe est bien différente lorsque ν est égal à 1 ou à 3. Soit $\nu = 1$, pour fixer les idées. La droite joignant les milieux de $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ rencontre (P) en un point O, dont le transformé est à l'infini, sur OA_1. Cela étant, l'arc OA_3 se transforme en un arc hyperbolique, qui s'étend à l'infini, asymptotiquement à une droite D. Les deux branches se touchent en A_3, et il y a rebroussement en ce point, sans que la courbure y soit nécessairement infinie. De même, l'arc OA_1 donne lieu à une autre branche hyperbolique, se raccordant avec (P) en A_1, de manière qu'il y a inflexion en ce point, sans que la courbure y soit nécessairement nulle. Cette seconde branche s'étend aussi à l'infini, asymptotiquement à D. La construction de D est fort aisée. Cette droite est la transformée de la tangente à (P), en O : elle rencontre donc cette tangente sur l'axe $A_2 A_3$, et, d'autre part, elle est parallèle à OA_1.

En résumé, la potentielle triangulaire affecte trois formes différentes, en relation avec l'égalité (35). Si une telle égalité n'a pas lieu, la courbe s'arrête aux extrémités du côté moyen. Si l'égalité (35) a lieu, et que les nombres r_1, r_3 soient impairs, la potentielle est une courbe fermée. Enfin, lorsqu'un des nombres r_1, r_3 est pair, la potentielle est une courbe ouverte, ayant deux branches asymptotiques à une même droite, et présentant une inflexion et un rebroussement. Transcendante dans le premier cas, la potentielle est algébrique, de degré pair ou de degré impair, dans les deux autres cas.