NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI FERVAL

Solution de la question proposée au concours d'agrégation en 1887

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 236-243

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__236_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1887;

PAR M. HENRI FERVAL,
Élève à l'École Normale supérieure.

1° *Démontrer que le lieu des points, tels que les tangentes menées de chacun d'eux à une conique* S *soient conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées à une autre conique* S', *est une troisième conique* Σ *qui passe par les points de contact* $a, b, c, d, a', b', c', d'$ *des tangentes communes aux deux coniques* S *et* S'.

2° *La conique* S *étant une ellipse donnée, et la conique* Σ *un cercle donné, trouver l'équation de la conique* S'.

3° *Démontrer qu'il existe quatre circonférences de cercles réelles passant chacune par deux foyers de la conique* S *et deux foyers de la conique* S'.

4° *Soient* a *et* a' *les points de contact de* S *et* S' *avec l'une de leurs tangentes communes. Démontrer que si* a' *est la projection du centre de la conique* S *sur la tangente commune, les normales à* S' *aux points* b', c', d' *se coupent en un point* M *qui reste fixe, quand* Σ *varie de façon à passer constamment en* a *et* a'.

1° Pour axes de coordonnées, nous prendrons les axes de S; les équations de S et S' seront

$$(\mathrm{S}) \qquad a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0,$$

$$(\mathrm{S}') \qquad \mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}uv + \mathrm{C}v^2 + 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{E}v + \mathrm{F} = 0.$$

Soit un point

$$ux + vy - 1 = 0;$$

les points à l'infini, situés sur les tangentes menées de ce point aux deux coniques, satisfont aux relations

$$(a^2 - x^2)u^2 - 2xyuv + (b^2 - y^2)v^2 = 0,$$
$$(A + 2Dx + Fx^2)u^2 + 2(B + Dy + Ex + Fxy)uv$$
$$+ (C + 2Ey + Fy^2)v^2 = 0.$$

En écrivant que ces points forment une division harmonique, on trouve, pour l'équation du lieu,

$$-2xy[B + Dy + Ex + Fxy]$$
$$= (b^2 - y^2)(A + 2Dx + Fx^2) + (a^2 - x^2)(C + 2Ey + Fy^2),$$

ou, en réduisant,

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Fb^2 - C)x^2 + 2Bxy + (Fa^2 - A)y^2 \\ \quad + 2Db^2x + 2Ea^2y + Ab^2 + Ca^2 = 0. \end{array} \right.$$

Montrons que la conique Σ passe aux huit points de contact des tangentes communes à S et S'.

Les coordonnées de la tangente à S au point (x, y) sont :

$$u = \frac{x}{a^2}, \qquad v = \frac{y}{b^2};$$

exprimons qu'elles vérifient (S'), et nous obtenons la condition

$$\frac{Ax^2}{a^4} + \frac{2Bxy}{a^2b^2} + \frac{Cy^2}{b^4} + \frac{2Dx}{a^2} + \frac{2Ey}{b^2} + F = 0.$$

Remplaçons, dans cette relation, $\frac{x^2}{a^2}$ par $1 - \frac{y^2}{b^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$ par $1 - \frac{x^2}{a^2}$, F par $F\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$, et nous retrouvons l'équation de Σ; la conique Σ passe donc au point (x, y).

Elle passe de même aux sept autres points de contact des tangentes communes à S et S'.

De cette propriété, il résulte que le triangle autopolaire de S et S' est conjugué par rapport à Σ.

2° Identifions Σ avec le cercle

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0,$$

et nous obtenons les relations

$$B = 0, \quad \frac{Fb^2 - C}{1} = \frac{Fa^2 - A}{1} = \frac{Db^2}{m} = \frac{Ea^2}{n} = \frac{Ab^2 + Ca^2}{p};$$

d'où nous tirons

$$F = \frac{A - C}{c^2} = \frac{A(p + a^2 + b^2)}{(p + c^2)a^2}, \qquad E = \frac{2nA}{p + c^2}\,\frac{b^2}{a^2},$$

$$D = \frac{2mA}{p + c^2}, \qquad C = \frac{p - c^2}{p + c^2}\,\frac{b^2}{a^2}\,A,$$

et l'équation de S' est alors

$$\begin{aligned} &a^2(p + c^2)u^2 + b^2(p - c^2)v^2 \\ &\qquad + 2ma^2u + 2nb^2v + p + a^2 + b^2 = 0. \end{aligned}$$

D'après ce qui a été dit dans la première Partie, cette conique admet pour triangle conjugué le triangle autopolaire de S et du cercle donné.

3° Les quatre cercles que nous devons trouver ont pour centres les quatre points d'intersection des axes de S avec ceux de S'.

Soit un cercle contenant les deux foyers imaginaires de S,

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x + c^2 = 0.$$

Pour qu'un point (x, y) soit un foyer de S', il faut que les points à l'infini situés sur les tangentes menées de ce point à S' soient confondus avec les ombilics, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Fxy + Ex + Dy = 0, \\ A + 2Dx + Fx^2 = C + 2Ey + Fy^2 \\ \text{ou} \\ F(y^2 - x^2) - 2Dx + 2Ey - Fc^2 = 0. \end{array} \right.$$

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de S′; le cercle a pour nouvelle équation

$$(\mathrm{C}')\qquad \left\{\begin{aligned} & x^2+y^2-2\left(\lambda+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}\right)x \\ & \quad -2\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}y+\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{F}^2}+\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}+c^2+2\lambda\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}=0,\end{aligned}\right.$$

et les hyperboles focales (1) deviennent

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} & y^2-x^2-\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}+\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{F}^2}-c^2=0, \\ & xy-\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{F}^2}=0.\end{aligned}\right.$$

La combinaison par homogénéité des deux équations (2) nous donne l'équation aux axes de (S′),

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{F}^2}(y^2-x^2)+\left(\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{E}^2}-\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}-c^2\right)xy=0.$$

L'axe de S′, qui passe au centre du cercle considéré, a pour coefficient angulaire

$$\frac{\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}}{\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}+\lambda};$$

l'axe perpendiculaire sera

$$y=-\frac{\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}+\lambda}{\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}}x.$$

Écrivons que cet axe coupe le cercle (C′) et la seconde hyperbole (2) aux mêmes points : nous trouvons la condition

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}=\left(\lambda+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}\right)\frac{-\dfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{F}^2}+\dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}+c^2+2\left(\lambda+\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}\right)\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}}{\dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}+\left(\lambda+\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}\right)^2},$$

ou

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \theta(\lambda) = {} & \frac{D}{F}\left(\lambda + \frac{D}{F}\right)^2 \\ & + \left(\frac{E^2}{F^2} - \frac{D^2}{F^2} + c^2\right)\left(\lambda + \frac{D}{F}\right) - \frac{E^2 D}{F^3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette condition est vérifiée, puisqu'elle exprime que la droite $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{E}{F}}{\frac{D}{F} + \lambda}$ est une direction d'axes de l'ellipse S'.

Aux deux valeurs de λ, tirées de l'équation (4), correspondent donc deux cercles passant aux foyers imaginaires de S et contenant l'un les foyers réels, l'autre les foyers imaginaires de S'.

Les deux racines de l'équation (4) sont manifestement réelles; mais, pour que les deux cercles correspondants soient réels, il faut que leurs rayons soient réels, en d'autres termes, que l'on ait

$$\lambda^2 - c^2 > 0.$$

Substituons c et $-c$ dans $\theta(\lambda)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta(c) &= c^2 \frac{D}{F} + c\left(\frac{E^2}{F^2} + \frac{D^2}{F^2} + c^2\right) + c^2 \frac{D}{F} \\ &= c\left[\left(c + \frac{D}{F}\right)^2 + \frac{E^2}{F^2}\right] > 0, \\ \theta(-c) &= c^2 \frac{D}{F} - c\left(\frac{E^2}{F^2} + \frac{D^2}{F^2} + c^2\right) + c^2 \frac{D}{F} \\ &= -\left[\left(-c + \frac{D}{F}\right)^2 + \frac{E^2}{F^2}\right] < 0. \end{aligned}$$

Ces résultats montrent qu'il y a toujours une racine de l'équation (4) comprise entre $+c$ et $-c$, et une autre extérieure à $+c$ et $-c$.

La première racine donne un cercle imaginaire, c'est celui qui renferme les quatre foyers imaginaires des deux coniques, et l'autre donne un cercle réel.

On verra de la même façon qu'il y a un troisième cercle passant aux deux foyers réels de S, aux deux foyers imaginaires de S', et ce cercle est réel; un quatrième cercle passant aux deux foyers imaginaires de S, aux deux foyers réels de S', et ce cercle est réel.

Ainsi, les quatre cercles dont il est parlé dans l'énoncé ne sont pas tous réels; il y en a un qui est imaginaire.

Remarque. — La propriété que nous venons de démontrer résulte immédiatement de ce fait que Σ est un cercle. En effet, puisque les tangentes menées de chaque point cyclique à S et S' forment un faisceau harmonique, les deux faisceaux de quatre tangentes issues des deux points cycliques sont homographiques, et les points d'intersection de leurs droites homologues appartiennent à une conique passant aux points cycliques, c'est-à-dire à un cercle. Comme on peut combiner les droites des deux faisceaux de quatre manières différentes, il y a quatre cercles passant par deux foyers de S et deux foyers de S'.

Les centres de ces quatre cercles étant réels, trois d'entre eux, qui contiennent des foyers réels, sont nécessairement réels.

4° Pour démontrer plus commodément la quatrième Partie, au lieu de rapporter S à ses axes, nous prendrons la tangente $a'a$ pour axe des x, la normale à S' pour axe des y, et nous poserons $a'a = d$.

La conique S, qui est tangente à $a'x$ au point a et a son centre sur $a'y$, est définie par l'équation

$$(S) \qquad A u^2 - 2E\, duv + 2Ev + F = 0,$$

et la conique S', tangente en a' à $a'x$, a pour équation

$$(S') \qquad A' u^2 + 2D'u + 2E'v + F' = 0,$$

ou, en coordonnées ponctuelles,

$$(S') \quad E'^2x^2 - 2D'E'xy + (D'^2 - A'F')y^2 - 2A'E'y = 0.$$

En nous servant des équations tangentielles des deux coniques S et S′, comme nous l'avons fait dans la première Partie, nous trouvons pour équation de la conique Σ

$$(\Sigma)\ \begin{cases} (AF'+FA')y^2+2E(D'+F'd)xy-2EE'x^2 \\ \qquad\qquad +2EE'dx+2(AE'+EA'+D'Ed)y=0. \end{cases}$$

On voit bien qu'elle passe en a et a'. Pour qu'elle soit un cercle, il faut que l'on ait

$$\begin{cases} AF'+FA'=-2EE', \\ D'+F'd=0; \end{cases}$$

cette dernière condition exprime que le centre de S′ se trouve sur la normale en a à la conique S. L'équation du cercle (Σ) devient alors

$$(\Sigma')\qquad x^2+y^2-dx-\frac{AE'+EA'+D'Ed}{EE'}y=0.$$

Écrivons les équations (S′) et (Σ′) comme il suit :

$$x(E'^2x-D'E'y)=-y[(D'^2-A'F')y-D'E'x-2A'E'],$$
$$x(x-d)=-y\left(y-\frac{AE'+EA'+D'Ed}{EE'}\right),$$

et combinons-les par division, nous obtiendrons une conique (H) passant en b', c', d', et ne contenant plus le point a',

$$(H)\qquad \frac{E'^2x-D'E'y}{x-d}=\frac{(D'^2-A'F')y-D'E'x-2A'E'}{y-\dfrac{AE'+EA'+D'Ed}{EE'}}.$$

Les coefficients de x^2 et y^2 étant égaux et de signes contraires dans cette équation, H est une hyperbole équilatère. Les directions asymptotiques sont définies par l'équation

$$-D'E'm^2 + (E'^2 - D'^2 + A'F')m + D'E' = 0,$$

qui montre qu'elles sont parallèles aux axes de S'.

Les normales en b', c', d' concourront en un point M, si cette hyperbole équilatère H passe au centre de S'; car, sous cette condition, elle peut toujours être identifiée avec une hyperbole aux pieds des normales. Or, les coordonnées du centre de S', d et $\frac{E'}{D'}d$, annulent les deux termes du premier membre de (H); il en résulte, comme il vient d'être dit, que les normales en b', c', d' se rencontrent en M.

Pour avoir la position du point M, nous couperons l'hyperbole H par la droite $x = 2d$, qui est la normale à S' au point $\left(2d,\ 2\frac{E'}{D'}d\right)$, symétrique de a' par rapport à son centre $\left(d,\ \frac{E'}{D'}d\right)$. Les racines de l'équation aux ordonnées des points d'intersection ayant pour produit

$$\frac{A}{E} \times 2\frac{E'}{D'}d,$$

les coordonnées du point M sont $2d$ et $\frac{A}{E}$. On voit qu'elles ne dépendent pas du cercle Σ, mais seulement de la conique donnée S.

Remarque. — Nous avons vu, par la condition

$$D' + F'd = 0,$$

que le centre de S' se projette sur aa' au point a; les deux coniques S et S' sont donc, l'une par rapport à l'autre, dans les mêmes conditions, et le cercle Σ est, pour S, un cercle de Joachimstahl, comme il l'est pour S'.

Note. — La même question a été résolue d'une manière analogue par MM. Loye et Sentou, par M. le capitaine E. Barisien, et par M. Paul Dauvin, professeur au collège de Beauvais.