A. AURIC

Problème

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 198-199
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__198_1>

PROBLÈME;

PAR M. A. AURIC,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Soient n aiguilles tournant autour du même axe, dans le même sens, avec des vitesses p fois plus grandes l'une que l'autre.

Nous voulons déterminer une position de ces n aiguilles, telle qu'il soit possible de les permuter circulairement.

Adoptons le système de numération de base p; la position des aiguilles est complètement déterminée par la fraction de circonférence décrite par l'aiguille qui tourne le plus lentement.

Considérons la fraction périodique

$$0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots\alpha_n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots\alpha_n\alpha_1\alpha_2\ldots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_n$ sont des entiers tous plus petits que la base p.

Je dis que, pour cette position des aiguilles, on pourra les permuter circulairement.

En effet, la $m^{\text{ième}}$ aiguille, par exemple, a décrit un arc exprimé en circonférences par

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1},\alpha_m\ldots\alpha_n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots\alpha_n\alpha_1\alpha_2\ldots;$$

autrement dit, cette aiguille a fait un nombre entier de tours, plus la fraction de circonférence

$$0,\alpha_m\ldots\alpha_n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots\alpha_n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots.$$

Cette expression montre que l'on pourra permuter circulairement toutes les aiguilles, car elle est indépendante de l'aiguille que l'on considère.

Nous aurons donc autant de positions qu'il y a de nombres d'au plus n chiffres dans le système de numération p, soit p^n.

En particulier, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, la fraction de circonférence décrite sera la même pour toutes les aiguilles; autrement dit, elles sont toutes confondues.

Considérons l'aiguille des heures et celle des minutes d'une montre ordinaire : ici $p = 12$, et toutes les positions données par la fraction

$$0,\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\ldots$$

représentent des positions que l'on peut intervertir; α et β sont plus petits que 12 et sont exprimés : α en heures et β en 5^{m}.