NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. MARCHAND

Solution de la question proposée au concours général de 1886

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 14-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__14_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1886;

PAR M. E. MARCHAND,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Caen.

1° *Étant donnés une surface du second ordre* S *et deux points* A, B, *on mène par le point* B *une sécante* *qui rencontre la surface* S *aux points* C, C′ *et le plan polaire du point* A *au point* D,

Soient M *et* M′ *les points où la droite* AD *rencontre les plans qui touchent la surface* S *aux points* C *et* C′.

La sécante BD *tournant autour du point* B, *on demande le lieu décrit par les points* M *et* M′.

2° *Ce lieu se compose de deux surfaces du second ordre, dont l'une est indépendante de la position occupée par le point* B *dans l'espace, et dont l'autre* Σ *dépend de la position de ce point.*

Chercher ce que devient la surface Σ *quand, dans la construction qui donne les points de cette surface, on fait jouer au point* A *le rôle du point* B, *et inversement.*

3° *Le point* A *restant fixe, déterminer les positions occupées par le point* B *quand la surface* Σ *n'a pas un centre unique à distance finie.*

Remarques préliminaires. — Étant donnés deux points $A(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $B(\xi, \eta, \zeta, \theta)$, on sait que, pour tout point $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ de la droite AB, on a

$$x_1 = \lambda\alpha - \mu\xi, \qquad y_1 = \lambda\beta - \mu\eta,$$
$$z_1 = \lambda\gamma - \mu\zeta, \qquad t_1 = \lambda\delta - \mu\theta.$$

Si M_1 coïncide avec un des points de rencontre de la droite AB avec une surface du second ordre S dont l'équation est

$$(S) \qquad f(x, y, z, t) = 0,$$

et qu'on pose, pour abréger l'écriture,

$$\begin{aligned}[\alpha x] \equiv \tfrac{1}{2}(x f'_\alpha - y f'_\beta + z f'_\gamma + t f'_\delta) \\ - \tfrac{1}{2}(\alpha f'_x + \beta f'_y - \gamma f'_z + \delta f'_t),\end{aligned}$$

le plan tangent en M_1 à la surface S sera défini par

$$[x_1 x] = 0. \qquad [x_1 x_1] = 0.$$

ou encore par

$$\lambda[\alpha x] - \mu[\xi x] = 0, \qquad \lambda^2[\alpha\alpha] - 2\lambda\mu[\alpha\xi] + \mu^2[\xi\xi] = 0.$$

Éliminant λ et μ entre ces deux dernières équations, on obtiendra l'équation du système des deux plans tangents menés à S par les points P, Q où cette quadrique est rencontrée par AB,

$$[\alpha\alpha][\xi x]^2 - 2[\alpha\xi][\xi x][\alpha x] + [\xi\xi][\alpha x]^2 = 0.$$

4. Je désigne par les lettres suivantes les coordonnées des différents points qui ont à intervenir dans la solution

$$\text{A}(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad \text{B}(\xi, \eta, \zeta, \theta), \quad \text{D}(x_1, y_1, z_1, t_1), \quad \text{M}(x, y, z, t).$$

L'équation des plans tangents menés à S par les points C et C' où elle est rencontrée par BD est

$$(1) \qquad [x_1 x_1][\xi x]^2 - 2[x_1\xi][\xi x][x_1 x] + [\xi\xi][x_1 x]^2 = 0.$$

Le point D étant dans le plan polaire de A, on a

$$(2) \qquad [\alpha x_1] = 0.$$

Enfin, les trois points A, D, M étant en ligne droite,

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda x - \mu\alpha, \\ y_1 = \lambda y - \mu\beta, \\ z_1 = \lambda z - \mu\gamma, \\ t_1 = \lambda t - \mu\delta. \end{cases}$$

Remplaçant, dans (1) et (2), les coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 de D par leurs expressions (3) et éliminant ensuite les paramètres λ, μ, on aura l'équation du lieu géométrique cherché.

On obtient, à simple vue,

$$(2\ bis) \qquad \begin{cases} [\alpha x_1] = \lambda[\alpha x] - \mu[\alpha\alpha] = 0, \\ [x_1 x] = \lambda[xx] - \mu[\alpha x] = 0, \\ [x_1\xi] = \lambda[\xi x] - \mu[\alpha\xi] = 0. \end{cases}$$

Tenant compte de ces premières identités,

$$\begin{aligned}[x_1 x_1] &\equiv \lambda^2[xx] - 2\lambda\,\mu[\alpha x] + \mu^2[\alpha\alpha] \\ &\equiv \lambda\left\{\lambda[xx] - \mu[\alpha x]\right\} - \mu\left\{\lambda[\alpha x] - \mu[\alpha\alpha]\right\} \equiv \lambda[x_1 x].\end{aligned}$$

L'équation (1) devient

$$(1\ bis)\qquad [x_1 x]\left\{\lambda[\xi x]^2 - 2[\xi x_1][\xi x] + [\xi\xi][x_1 x]\right\} = 0.$$

2. Le lieu se compose donc de deux surfaces.

La première $[x_1 x] = 0$ est indépendante de la position du point B dans l'espace. Remplaçant x_1 par sa valeur (3) en fonction de λ, μ et tirant de (2 *bis*) les valeurs proportionnelles de λ, μ, il vient

$$[x_1 x] \equiv [\alpha\alpha][xx] - [\alpha x]^2 = 0.$$

C'est le cône circonscrit à S de sommet A.

Pour la seconde surface Σ, on a d'abord

$$[\xi\xi][x_1 x] - 2[\xi x_1][\xi x] + \lambda[\xi x]^2 = 0,$$

puis

$$[\xi\xi][x_1 x] - 2\lambda[\xi x]^2 + 2\mu[\xi\alpha][\xi x] + \lambda[\xi x]^2 = 0.$$

Finalement on trouve

$$(\Sigma)\qquad [\xi\xi]\left\{[\alpha\alpha][xx] - [\alpha x]^2\right\} - [\alpha\alpha][\xi x]^2 + 2[\alpha\xi][\xi x][\alpha x] = 0.$$

On voit immédiatement que le cône circonscrit à S de sommet A est coupé par Σ suivant deux courbes planes situées dans les plans

$$[\xi x]\left\{[\alpha\alpha][\xi x] - 2[\alpha\xi][\alpha x]\right\} = 0.$$

Le premier plan $[\xi x] = 0$ est le plan polaire de B; le second passe par l'intersection du plan polaire de A et du plan polaire de B, c'est-à-dire par la droite P′Q′ polaire conjuguée de la droite AB par rapport à S. Pour définir ce plan avec plus de précision, je vais montrer qu'il appartient à un faisceau harmonique dans lequel on connaît d'avance trois plans. En effet, si l'on introduit le plan P′Q′A qui a pour équation

$$[\alpha\alpha][\xi x] - [\alpha\xi][\alpha x] = 0,$$

on a quatre plans passant par P′Q′

$$[\xi x] = 0, \qquad [\xi x] - 2K[\alpha x] = 0.$$
$$[\alpha x] = 0, \qquad [\xi x] - K[\alpha x] = 0, \qquad K \equiv \frac{[\alpha\xi]}{[\alpha\alpha]},$$

et donnant comme rapport anharmonique

$$\frac{x - 0}{x - 2K} : \frac{K - 0}{K - 2K} = -1.$$

On peut écrire ainsi l'équation de Σ

$$(4) \qquad [\alpha\alpha][\xi\xi][xx] = [\xi\xi][\alpha x]^2 - 2[\alpha\xi][\alpha x][\xi x] + [\alpha\alpha][\xi x]^2.$$

Si l'on fait jouer au point A le rôle du point B, et inversement, l'équation de Σ ne change pas.

Ce résultat remarquable permet d'affirmer, sans nouveau calcul, que le cône de sommet B circonscrit à S est coupé par Σ suivant deux courbes planes dont l'une est dans le plan polaire de A, l'autre dans un plan facile à définir par les propriétés des faisceaux harmoniques. La surface Σ est définie surabondamment, au point de vue géométrique, par ces quatre sections planes qui passent par une même droite P′Q′.

Reprenant l'équation de Σ sous la forme (4), je vois que le premier membre égalé à zéro donne la surface S; le second membre égalé à zéro représente le système des deux plans tangents menés à la surface S par les points P et Q où elle est rencontrée par AB.

Donc Σ passe par le quadrilatère gauche déterminé par les quatre génératrices de S qui passent en P et Q. Les diagonales PQ, P′Q′ du quadrilatère gauche sont évidemment deux droites polaires conjuguées par rapport à S et à Σ. Si donc on divise harmoniquement le segment PQ d'une part, le segment $P'Q'$ d'autre part, on aura quatre points qui seront les quatre sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport aux deux surfaces : par suite, S et Σ admettent une infinité de tétraèdres conjugués communs. On sait que, en ne considérant, bien entendu, que le cas des points A et B réels, une quadrique non réglée (ellipsoïde, hyperboloïde à deux nappes, paraboloïde elliptique) est telle que de deux droites conjuguées l'une rencontre en deux points réels, l'autre en deux points imaginaires; pour une quadrique réglée ou complètement imaginaire (ellipsoïde imaginaire, hyperboloïde à une nappe, paraboloïde hyperbolique), les quatre points de rencontre P, Q, P', Q' sont tous réels ou tous imaginaires. Il en résulte que les surfaces S et Σ sont simultanément réglées ou non réglées; en particulier, si Σ devient un paraboloïde, ce paraboloïde sera hyperbolique ou elliptique suivant que S sera réglée ou non.

Mais il reste à résoudre cette question. Toutes les surfaces Σ ont, avec S, un quadrilatère gauche commun; ne peut-on pas affirmer que, réciproquement, toute quadrique ayant un quadrilatère gauche commun avec S soit susceptible du mode de génération des surfaces Σ? Afin de traiter plus facilement cette question, je prendrai comme tétraèdre de référence un tétraèdre conjugué par rapport à S et ayant deux de ses sommets sur AB, ce qui suppose naturellement que S soit une surface sans point double, et que AB ne soit pas tangente à S :

$$(\mathrm{S})\qquad ax^2+by^2+cz^2+dt^2=0,$$
$$\alpha=\beta=0,\qquad \xi=\eta=0.$$

On obtient, par des réductions faciles, cette nouvelle équation de Σ

$$(5) \qquad [\alpha\alpha][\xi\xi](ax^2+by^2)+[\alpha\xi]^2(cz^2+dt^2)=0,$$

$$[\alpha\alpha]=c\gamma^2+d\delta^2, \qquad [\xi\xi]=c\zeta^2+d\theta^2, \qquad [\alpha\xi]=c\gamma\zeta+d\delta\theta.$$

Ce résultat nouveau est de la forme

$$(5) \qquad T+\lambda T'=0, \qquad \lambda=\frac{[\alpha\xi]^2}{[\alpha\alpha][\xi\xi]},$$

$T=0$ représentant le système des deux plans tangents menés à S par AB; $T'=0$, le système des deux plans tangents menés à S aux points de rencontre avec AB. Si donc on démontre que le paramètre λ peut prendre toutes les valeurs imaginables, l'équation (5) de Σ représentera bien un faisceau de quadriques passant par quatre génératrices de S qui ne sont d'ailleurs assujetties qu'à la condition de former un quadrilatère gauche.

Or on sait (*Leçons sur la Géométrie;* par A. Clebsch, t. I, p. 95) que, si la droite AB rencontre en P et Q la surface S et qu'on désigne par ρ le rapport anharmonique formé par les points A, B avec les points P, Q, on a

$$(\rho+1)^2[\alpha\alpha][\xi\xi]-4[\alpha\xi]^2\rho=0.$$

Même en laissant A fixe, on pourrait disposer de B de manière que ρ et, par suite, $\lambda=\dfrac{(\rho+1)^2}{4\rho}$ aient une valeur choisie d'avance. Mais il est bien remarquable qu'on retrouve la même surface Σ toutes les fois que les points A et B, restant sur une droite fixe PQ, se déplacent de manière à donner constamment le même rapport anharmonique avec les points P et Q d'intersection de la droite fixe avec S.

En résumé, toute surface du second ordre ayant un quadrilatère gauche commun avec S est susceptible, et cela d'une infinité de manières, du mode de génération indiqué par l'énoncé du problème. Les points A et B doivent être pris sur une des diagonales du quadrilatère gauche de manière à former avec les deux sommets situés sur cette diagonale un certain rapport anharmonique.

3. Si la surface Σ n'a pas un centre unique à distance finie, elle est tangente au plan de l'infini. Pour résoudre le problème proposé, je vais d'abord former l'équation tangentielle de Σ, puis j'exprimerai que le plan de l'infini vérifie cette équation tangentielle.

L'équation de Σ peut s'écrire

$$(4)\quad \Sigma \equiv l[xx] + m[\alpha x]^2 + 2n[\alpha x][\xi x] + h[\xi x]^2 = 0,$$

$$(5)\quad l \equiv [\alpha\alpha][\xi\xi], \qquad m \equiv -[\xi\xi], \qquad n \equiv [\alpha\xi], \qquad h \equiv -[\alpha\alpha].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x} &\equiv \tfrac{1}{2} l \frac{\partial f}{\partial x} + m[\alpha x]\tfrac{1}{2}f'_\alpha \\ &+ n\left\{[\alpha x]\tfrac{1}{2}f'_\xi + [\xi x]\tfrac{1}{2}f'_\alpha\right\} + h[\xi x]\tfrac{1}{2}f'_\xi. \end{aligned}$$

Posant, pour abréger,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{llll} m\alpha + n\xi = x_1, & m\beta + n\eta = y_1, & m\gamma + n\zeta = z_1, & m\delta + n\theta = t_1, \\ n\alpha + h\xi = x_2, & n\beta + h\eta = y_2, & n\gamma + h\zeta = z_2, & n\delta + h\theta = t_2, \end{array}\right.$$

il vient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x} \equiv \tfrac{1}{2} l \frac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{1}{2}f'_{x_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2}f'_{x_2}[\xi x].$$

Désignant par u, v, w, p les coordonnées d'un plan tangent à z, on sait qu'on aura les équations

$$\begin{aligned} &l(\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'z + \mathrm{C}\,t) + \tfrac{1}{2}f'_{x_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2}f'_{x_2}[\xi x] + \lambda u = 0, \\ &l(\mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}\,z + \mathrm{C}'t) + \tfrac{1}{2}f'_{y_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2}f'_{y_2}[\xi x] + \lambda v = 0, \\ &l(\mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}''t) + \tfrac{1}{2}f'_{z_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2}f'_{z_2}[\xi x] + \lambda w = 0, \\ &l(\mathrm{C}\,x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z + \mathrm{D}t) + \tfrac{1}{2}f'_{t_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2}f'_{t_2}[\xi x] + \lambda p = 0, \\ &\qquad \tfrac{1}{2}f'_\alpha x + \tfrac{1}{2}f'_\beta y + \tfrac{1}{2}f'_\gamma z + \tfrac{1}{2}f'_\delta t - [\alpha x] \equiv 0, \\ &\qquad \tfrac{1}{2}f'_\xi x + \tfrac{1}{2}f'_\eta y + \tfrac{1}{2}f'_\zeta z + \tfrac{1}{2}f'_\theta t - [\xi x] \equiv 0, \\ &\qquad\qquad ux + vy + wz + pt = 0. \end{aligned}$$

Considérant x, y, z, t, $[\alpha x]$, $[\xi x]$ et λ comme des inconnues distinctes, on a sept équations linéaires homogènes à sept inconnues, d'où l'équation tangentielle

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} lA & lB'' & lB' & lC & \frac{1}{2}f'_{x_1} & \frac{1}{2}f'_{x_2} & u \\ lB'' & lA' & lB & lC' & \frac{1}{2}f'_{y_1} & \frac{1}{2}f'_{y_2} & v \\ lB' & lB & lA'' & lC'' & \frac{1}{2}f'_{z_1} & \frac{1}{2}f'_{z_2} & w \\ lC & lC' & lC'' & lD & \frac{1}{2}f'_{t_1} & \frac{1}{2}f'_{t_2} & p \\ \frac{1}{2}f'_\alpha & \frac{1}{2}f'_\beta & \frac{1}{2}f'_\gamma & \frac{1}{2}f'_\delta & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}f'_\xi & \frac{1}{2}f'_\eta & \frac{1}{2}f'_\zeta & \frac{1}{2}f'_\theta & 0 & -1 & 0 \\ u & v & w & p & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} P &\equiv ux + vy + wz + pt, \\ P_1 &\equiv ux_1 + vy_1 + wz_1 + pt_1, \\ P_2 &\equiv ux_2 + vy_2 + wz_2 + pt_2, \end{aligned}$$

on obtient d'abord, en tenant compte de (5) et de (6),

$$l \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & 0 & 0 & u \\ B'' & A' & B & C' & 0 & 0 & v \\ B' & B & A'' & C'' & 0 & 0 & w \\ C & C' & C'' & D & 0 & 0 & p \\ \frac{1}{2}f'_\alpha & \frac{1}{2}f'_\beta & \frac{1}{2}f'_\gamma & \frac{1}{2}f'_\delta & -[\alpha\xi]^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}f'_\xi & \frac{1}{2}f'_\eta & \frac{1}{2}f'_\zeta & \frac{1}{2}f'_\theta & 0 & -[\alpha\xi]^2 & 0 \\ u & v & w & p & -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Supprimant le facteur l et posant

$$P_\alpha \equiv u\alpha + v\beta + w\gamma + p\delta, \qquad P_\xi \equiv u\xi + v\eta + w\zeta + p\theta,$$

on obtient facilement

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & 0 & 0 & u \\ B'' & A' & B & C' & 0 & 0 & v \\ B' & B & A'' & C'' & 0 & 0 & w \\ C & C' & C'' & D & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -[\alpha\xi]^2 & 0 & -P_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\alpha\xi]^2 & -P_\xi \\ u & v & w & p & -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les colonnes 5 et 6 contenant beaucoup de zéros, il est naturel de développer suivant les éléments de ces deux colonnes, par la règle de Laplace. On trouve très facilement que, si l'on désigne par H le hessien de la surface S, et par $\varphi(u, v, w, p)$ le déterminant qui, égalé à zéro, donne l'équation tangentielle de S, on obtient, après suppression de $[\alpha\xi]^2$, l'expression

$$(8) \qquad [\alpha\xi]^2 \varphi(u, v, w, p) + H(P_1 P_\alpha + P_2 P_\xi) = 0.$$

Mais, d'après (6),

$$P_1 \equiv -[\xi\xi]P_\alpha + [\alpha\xi]P_\xi, \qquad P_2 \equiv [\alpha\xi]P_\alpha - [\alpha\alpha]P_\xi,$$

et l'équation tangentielle de Σ devient définitivement

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &[\alpha\xi]^2 \varphi(u, v, w, p) \\ &\quad + H\left\{ -[\xi\xi]P_\alpha^2 + 2[\alpha\xi]P_\alpha P_\xi - [\alpha\alpha]P_\xi^2 \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer, le point A restant fixe, les positions occupées par le point B quand la surface Σ reste tangente à un plan fixe, il suffit de considérer, dans (9), u, v, w, p comme des constantes, et d'y faire $\xi = x$. Il vient

$$(9\,bis) \quad \left\{ \begin{aligned} HP_\alpha^2[xx] &= \varphi(v, w, p)[\alpha x]^2 \\ &\quad + 2HP_\alpha[\alpha x]P_x - H[\alpha\alpha]P_x^2. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre égalé à zéro donne la surface primitive S; le second membre égalé à zéro donne le système des deux plans tangents menés à S par les points où cette surface est rencontrée par la droite qui joint le point A au pôle K du plan fixe u, v, w, p. En effet, désignant par x', y', z', t' les coordonnées de K, on sait que

$$u = \tfrac{1}{2}f'_{x'}, \qquad v = \tfrac{1}{2}f'_{y'}, \qquad w = \tfrac{1}{2}f'_{z'}, \qquad p = \tfrac{1}{2}f'_{t'}.$$

Remplaçant u, v, w, p par ces valeurs et s'appuyant sur l'identité bien connue

$$(10)\quad \varphi(u, v, w, p) = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & \frac{1}{2}f'_{x'} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = -H[x'x'],$$

on obtient, en place de (9 *bis*), l'équation toute simple

$$(11)\quad -[\alpha x']^2[xx] = [x'x'][\alpha x]^2 - 2[\alpha x'][\alpha x][x'x] + [\alpha\alpha][x'x]^2.$$

L'analogie avec (4) est frappante. Comme plus haut, si l'on prend

$$(\mathrm{S})\qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$\alpha = \beta = 0, \qquad x' = y' = 0,$$

on obtient, sans avoir à recommencer les calculs,

$$(12)\quad [\alpha x']^2(ax^2 + by^2) + [\alpha\alpha][x'x'](cz^2 + dt^2) = 0.$$

Alors il est inutile de reprendre ce qui a été dit à propos de l'équation (5) pour déduire de (12) les conclusions suivantes :

Toute quadrique ayant avec S un quadrilatère gauche commun peut être obtenue comme lieu des points B, tels que, A restant fixe, la surface Σ reste tangente à un certain plan donné. Il faut que le pôle K du plan donné et le point A soient situés sur une des diagonales du quadrilatère gauche et forment avec les sommets correspondants un rapport anharmonique déterminé.

Revenant à l'énoncé, on peut dire que la surface lieu des points B, tels que, A restant fixe, Σ n'ait pas un centre unique à distance finie, peut coïncider successivement avec toutes les quadriques qui ont en commun avec S un quadrilatère gauche dont une diagonale passe par le centre de la surface S.

1. Chaque surface ayant avec S un quadrilatère gauche

commun, dont PQ, P'Q' sont les diagonales, peut être obtenue de quatre manières différentes; on peut prendre A et B ou A et K sur PQ; on peut prendre A et B ou A et K sur P'Q'. Si, dans chaque cas, les quatre points situés sur la diagonale donnent naissance au même rapport anharmonique, quelle relation existe-t-il entre les quatre surfaces particulières obtenues?

Pour résoudre cette question, je m'appuierai sur la forme très simple que prend l'équation Σ' de la polaire réciproque de Σ par rapport à S. On sait qu'il suffira de poser, dans l'équation tangentielle de Σ,

$$(13)\qquad u = \tfrac{1}{2}f'_x, \qquad v = \tfrac{1}{2}f'_y, \qquad w = \tfrac{1}{2}f'_z, \qquad p = \tfrac{1}{2}f'_t.$$

Or, tenant compte de l'identité (10), on voit que (9) devient, par la substitution (13),

$$(14)\quad -[\alpha\xi]^2[xx] = [\xi\xi][\alpha x]^2 - 2[\alpha\xi][\alpha x][\xi x] + [\alpha\alpha][\xi x]^2.$$

C'est l'équation (11), où x' a été remplacé par ξ.

Si donc on prend A et B d'une part, A et K d'autre part, sur la même diagonale et que le rapport anharmonique soit égal de part et d'autre, on obtient deux surfaces polaires réciproques par rapport à S.

S'appuyant sur les formes réduites (5) et (12), on voit facilement que, si l'on prend deux points A et B sur PQ, deux points A' et B' sur P'Q' et que les rapports anharmoniques soient les mêmes, on a encore deux surfaces polaires réciproques.

On aura, au contraire, la même surface si l'on prend deux points A et B sur l'une des diagonales, deux points A et K sur l'autre, les rapports anharmoniques étant égaux de part et d'autre.