NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Théories de la réfraction astronomique et de l'aberration

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 554-580

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__554_1>

THÉORIES DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE ET DE L'ABERRATION

[Suite (1)];

PAR M. OSSIAN BONNET.

Remarque. — Dans la démonstration ou plutôt la vérification qui précède, on a supposé que les constantes m,

(1) *Nouvelles Annales de Mathematiques,* 3e série, t. VI, juillet-août 1887. Quelques fautes matérielles se sont glissées dans ce premier article; quoiqu'elles n'aient aucune importance, il ne sera pas inutile d'en indiquer la correction :

Page 344, ligne 6 en descendant, *au lieu de* le moyen le plus simple, *lisez* l'évaluation la plus simple.

Page 350, ligne 3 en descendant, *entre* fondamental et des projections, *intercalez* de la théorie.

Page 360, lignes 2, 4, 8 en remontant, et page 361, ligne 4 en remontant, *au lieu de* 7993,147, *lisez* 7993,148.

Page 360, ligne 9 en remontant, *après* lequel poids, *ajoutez* rapporté à l'unité de volume.

Page 361, lignes 14 et 16 en remontant, *au lieu de* 7993,15, *lisez* 7993,148.

Page 364, ligne 2 en descendant, *supprimez* la diviser par $\sin 1''$ ou *et remplacez* 206265 par $\dfrac{648000}{\pi}$.

Page 364, ligne 4 en descendant, *remplacez* 206265 par $\dfrac{648000}{\pi}$.

Page 367, ligne 13 en remontant, et page 368, ligne 9 en descendant, *au lieu de* $10^7.799315$, *lisez* $10^6.7993148$.

Page 367, ligne 4 en remontant, *au lieu de* $\bar{1},9185493$, *lisez* $\bar{1},9185230$.

Page 368, ligne 11 en descendant, *au lieu de* 2,9439, *lisez* 2,94384.

M, a, D, $\frac{1}{2}(n_0'^2 - 1)$ et p'_0 qui représentent respectivement le coefficient de dilatation de l'air, le coefficient de dilatation du mercure, le rayon terrestre, la hauteur de l'atmosphère, la demi-puissance réfractive et la pression en un point de l'atmosphère situé à la surface de la terre dans les conditions atmosphériques normales, étaient rigoureusement définies par les relations

$$m = 0{,}003671, \qquad M = 0{,}000179, \qquad a = 6366738,$$
$$D = 75000, \qquad \tfrac{1}{2}(n_0'^2 - 1) = 0{,}00029438 4, \qquad p'_0 = 7993{,}148.$$

De plus, on a regardé les logarithmes à sept décimales fournis par les Tables comme jouissant d'une manière absolument exacte des mêmes propriétés que les logarithmes vrais ou théoriques au point de vue de la simplification des calculs numériques. Or tout cela n'est vrai qu'approximativement, et l'on peut avoir des doutes sur l'exactitude de la conclusion à laquelle nous avons été conduits. Voici une manière de raisonner qui est entièrement rigoureuse.

On peut toujours poser

$$m < 0{,}003671, \qquad M < 0{,}00017901, \qquad a + D < 6441800,$$
$$\tfrac{1}{2}(n_0'^2 - 1) < 0{,}00029439, \qquad p'_0 > 7993{,}1,$$

ainsi que cela résulte de calculs et d'expériences incontestés. Cela étant, nous aurons d'abord

$$1 + m T_0 > 0{,}88987, \qquad 1 - M T_0 > 0{,}994629,$$

puis

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{(n_0^2 - 1)}{\rho_0} = \frac{1}{2}(n_0'^2 - 1)\frac{H_0}{0{,}76}\,\frac{1}{1 + m T_0}\,\frac{1}{1 - M T_0}$$
$$< 0{,}00029439 \,.\, 1{,}0382\,\frac{1}{0{,}88987}\,\frac{1}{0{,}994629},$$
$$\beta = \frac{p_0}{\rho_0} = p'_0(1 + m T_0) > 9993{,}1 \,.\, 0{,}88987.$$

et la relation $r u \alpha < \beta$ ou mieux $(a + D)\alpha < \beta$ qu'il s'agit de vérifier deviendra, en augmentant le premier membre et diminuant le second,

$$64418.10^2 \frac{29439}{10^8} < 7993,1.\overline{0,88987}^2.0,994629$$

ou

$$10^2.6,4418.2,9439 < 7,9931.\overline{8,8987}^2.9,94629.$$

Nous substituerons à cette inégalité l'inégalité logarithmique correspondante; seulement, au lieu de considérer dans celle-ci les valeurs exactes des deux membres, nous prendrons une valeur approchée par excès dans le premier membre et une valeur approchée par défaut dans le second membre, ce qui suffira évidemment. Or les logarithmes fournis par les Tables à sept décimales étant approchés par défaut ou par excès à moins d'une unité décimale du septième ordre, on a, la caractéristique L désignant les logarithmes théoriques ou vrais, 1°

$$\begin{array}{lr}
 & \mathrm{L}.10^2 = 2 \\
 & \mathrm{L}.6,4418 < 0,8090073 \\
 & \mathrm{L}.2,9439 < 0,4689232 \\
 & \mathrm{L}.1,0382 < 0,0162811 \\
\text{Ce qui donne........} & 3,2942116
\end{array}$$

pour la limite supérieure du premier membre de l'inégalité logarithmique, et 2°

$$\begin{array}{lr}
 & \mathrm{L}.7,9931 > 0,9027151 \\
 & 2\,\mathrm{L}.8,8987 > 1,8986530 \\
 & \mathrm{L}.9,9463 > 0,9976615 \\
\text{Ce qui donne........} & 3,7990296
\end{array}$$

pour la limite inférieure du second membre de la même inégalité; on voit donc que l'inégalité logarithmique est satisfaite, et, par suite, que l'inégalité primitive l'est aussi.

VII. — Détermination de la valeur approchée de la réfraction totale.

Nous allons enfin déterminer une valeur approchée de l'intégrale définie

$$\frac{648000}{\pi}\,\alpha\,\operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}du,$$

où, pour simplifier, on a remplacé par ε la fonction

$$\left[1-\frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2\right]\operatorname{tang}^2 z_a$$

et qui exprime la valeur exacte de la réfraction totale R évaluée en secondes d'angle.

On a démontré précédemment que ε est positif pour toutes les valeurs de u et les valeurs correspondantes de s. De là il est aisé de conclure que l'on a

$$1-\tfrac{1}{2}\varepsilon<(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}<1-\tfrac{1}{2}\varepsilon+\tfrac{3}{8}\varepsilon^2.$$

En effet, $\varphi(\varepsilon)$ étant une fonction quelconque de ε, et θ et θ' deux nombres positifs moindres que 1, on sait que

$$\varphi(\varepsilon)=\varphi(0)+\varphi'(\theta\varepsilon)\varepsilon$$

et

$$\varphi(\varepsilon)=\varphi(0)+\varphi'(0)\varepsilon+\varphi''(\theta'\varepsilon)\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Faisons, dans la première égalité,

$$\varphi(\varepsilon)=(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}-1+\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

et, par suite,

$$\varphi'(\varepsilon)=-\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2},$$

$\varphi(0)$ sera nul, $\varphi'(\varepsilon)$ sera positif pour ε positif: donc $\varphi(\varepsilon)$ sera positif, et l'on aura

$$1-\tfrac{1}{2}\varepsilon<(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$$

pour ε positif. Faisons ensuite, dans la seconde égalité,

$$\varphi(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} - 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2;$$

d'où

$$\varphi'(\varepsilon) = -\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}\varepsilon$$

et

$$\varphi''(\varepsilon) = \tfrac{3}{4}(1+\varepsilon)^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{3}{4};$$

$\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$ seront nuls, $\varphi''(\theta'\varepsilon)$ sera négatif pour ε positif; donc $\varphi(\varepsilon)$ sera négatif, et l'on aura

$$(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} < 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2$$

pour ε positif. Cela étant, si l'on pose

$$\begin{aligned}
&\frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right) du \\
&\quad - \frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad \times \left\{1 - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2\right]\operatorname{tang}^2 z_a\right\} du = \mathrm{R}', \\
&\frac{3}{8}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\,\varepsilon^2\, du \\
&\quad = \frac{3}{8}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2\right]^2 \operatorname{tang}^4 z_a\, du = \mathrm{R}'',
\end{aligned}$$

on aura

$$\mathrm{R}' < \mathrm{R} < \mathrm{R}' + \mathrm{R}'';$$

par suite,

$$0 < \mathrm{R} - \mathrm{R}' < \mathrm{R}'':$$

mais,

$$\frac{1-s}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}$$

étant toujours moindre que 1 et

$$1 - \frac{1+2\alpha}{1+2\alpha u}(1-s)^2$$

positif et toujours moindre que $1-(1-s)^2 < 2s$, R″ est moindre que

$$\frac{3}{2}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1+2\alpha}\ \operatorname{tang}^5 z_a \int_0^1 s^2\,du$$

et, par conséquent, d'après ce qui a été démontré dans le paragraphe précédent, moindre que

$$3\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \operatorname{tang}^5 z_a;$$

on peut donc écrire

$$(a)\qquad 0 < \mathrm{R}-\mathrm{R}' < 3\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \operatorname{tang}^5 z_a,$$

et tout se réduit à trouver des limites R′, c'est-à-dire de

$$\frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\right)du$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang}^3 z_a \int_0^1 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\alpha u)^{\frac{5}{2}}}(1-s)^3\,du$$

ou encore de

$$\frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang} z_a \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}(1-s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\right)du$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang}^3 z_a \int_0^1 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}(1-3s)}{(1+2\alpha u)^{\frac{5}{2}}}\,du$$

$$+\frac{3}{2}\,\frac{648000}{\pi}\,\alpha \operatorname{tang}^3 z_a \int_0^1 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}} s^2\left(1-\frac{s}{3}\right)}{(1+2\alpha u)^{\frac{5}{2}}}\,du.$$

Or la troisième de ces dernières intégrales est moindre que $\frac{3}{2}\frac{648000}{\pi}\alpha(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tang}^3 z_a\int_0^1 s^2\,du$ et, par conséquent, moindre que $3\frac{648000}{\pi}\alpha(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\operatorname{tang}^3 z_a$. Si donc on l'appelle A_7 après y avoir supprimé le facteur

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a,$$

nous aurons, en premier lieu,

$$(7)\qquad 0 < A_7 < 3(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\operatorname{tang}^2 z_a.$$

Quant aux deux autres, elles se décomposent en les six suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\,du = A_1,$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\int_0^1 \frac{\sqrt{1+2\alpha}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\,du = A_2,$$

$$-\int_0^1 \frac{\sqrt{(1+2\alpha)s}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\,du = A_3.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\int_0^1 \frac{\sqrt{(1+2\alpha)s}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\,du = A_4.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\int_0 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\,du = A_5.$$

$$-\frac{3}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\int_0^1 \frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}s}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}\,du = A_6,$$

où l'on a supprimé également le facteur $\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a$.

La première de celles-ci est de la forme

$$\int_0^1 \varphi(u)\,du:$$

elle peut donc être évaluée exactement, et, si l'on observe que $(1+2\alpha u)^{-\frac{3}{2}}du$ est la différentielle par rapport à u de $-\dfrac{(1+2\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{\alpha}$, on trouve

$$A_1 = \frac{(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}-1}{\alpha} = 1-\frac{1}{2}\alpha+\frac{\alpha^2}{2}-\ldots;$$

ce qui donne, 2α étant moindre que 1,

$$(1) \qquad 1-\frac{1}{2}\alpha < A_1 < 1-\frac{1}{2}\alpha+\frac{\alpha^2}{2}.$$

A_2 étant égal au produit de A_1 par un facteur connu qui est ici négatif, les limites de A_2 se déduisent immédiatement de celles de A_1 et l'on obtient

$$(2) \quad -\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2}\right) < A_2 < -\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dans A_3 la fonction de u, $-\dfrac{\sqrt{1+2\alpha}}{(1+2\alpha u)^{\frac{3}{2}}}$, qui entre en facteur sous le signe $\int$, croît avec u et a par conséquent

$$-\sqrt{1+2\alpha} = -\left(1-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\ldots\right)$$

comme valeur minimum, et

$$-\frac{1}{1+2\alpha} = -(1-2\alpha+4\alpha^2-\ldots)$$

comme valeur maximum; donc, l'autre facteur s sous le signe $\int$ étant toujours positif, on peut écrire

$$-(1+\alpha)\int_0^1 s\,du < A_3 < -(1-2\alpha)\int_0^1 s\,du.$$

ce qui donne, en remplaçant l'intégrale par sa valeur obtenue plus haut,

$$(3)\qquad -(1+\alpha)\frac{\beta}{a} < A_3 < -(1-2\alpha)\frac{\beta}{a}.$$

A_4 étant le produit de A_3 par $-\frac{1}{2}\tang^2 z_a$, on a ensuite immédiatement

$$(4)\qquad (1-2\alpha)\frac{\beta}{a}\,\frac{1}{2}\tang^2 z_a < A_4 < (1+\alpha)\frac{\beta}{a}\,\frac{1}{2}\tang^2 z_a;$$

A_5, qui est comme A_1 de la forme $\int_0^1 \varphi(u)\,du$, rentre dans le type des quadratures ordinaires; on peut l'évaluer exactement et, si l'on observe que $(1+2\alpha u)^{-\frac{5}{2}}du$ est la différentielle par rapport à u de $-\frac{(1+2\alpha u)^{-\frac{3}{2}}}{3\alpha}$, on trouve

$$A_5 = \frac{1}{2}\tang^2 z_a\,\frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}-1}{3\alpha} = \frac{1}{2}\tang^2 z_a\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{6}+\ldots\right),$$

ce qui donne, 2α étant moindre que 1,

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\tang^2 z_a\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{6}\right) < A_5 < \frac{1}{2}\tang^2 z_a\left(1+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Enfin, dans A_6, la fonction de u, $-\frac{(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{(1+2\alpha u)^{\frac{5}{2}}}$, qui entre en facteur sous le signe $\int$, est croissante avec u et a par conséquent

$$-(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}} = -(1+3\alpha+\tfrac{3}{2}\alpha^2\ldots)$$

pour valeur minimum, et

$$-\frac{1}{1+2\alpha} = -(1-2\alpha+4\alpha^2-\ldots)$$

pour valeur maximum; donc, l'autre facteur s sous le signe $\int$ étant toujours positif, on peut écrire

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(3+9\alpha+\frac{9}{2}\alpha^2\right)\int_0^1 s\,du$$
$$< A_6 < -\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a(3-6\alpha)\int_0^1 s\,du,$$

ce qui donne

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\left(3+9\alpha+\frac{9}{2}\alpha^2\right)\frac{\beta}{a}\\ &\quad< A_6 < -\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a(3-6\alpha)\frac{\beta}{a}.\end{aligned}\right.$$

Ajoutant maintenant, membre à membre, les inégalités (1), (2), (3), (4), (5), (6) et (7), après avoir rétabli partout le facteur $\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a$, et posant, pour abréger,

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a\left[1-\frac{\alpha}{2}-\frac{l}{a}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{l}{a}\right)\operatorname{tang}^2 z_a\right]=r,$$

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a$$
$$\times\left[\alpha\frac{\beta}{a}+\left(\frac{2}{3}\alpha^2+11\alpha\frac{\beta}{a}+\frac{9}{2}\alpha^2\frac{\beta}{a}\right)\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\right]=\delta,$$

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a$$
$$\times\left\{\frac{\alpha^2}{2}+2\alpha\frac{\beta}{a}+\left[7\alpha\frac{\beta}{a}+6(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\right]\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a\right\}=\delta',$$

il vient

$$r-\delta < R' < r+\delta',$$

d'où

$$(b)\qquad -\delta < R'-r < \delta'.$$

Ajoutant encore, membre à membre, les inégalités (a) et (b), on trouve enfin

$$-\delta < R-r < \delta'+\frac{3.648000}{\pi}\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\operatorname{tang}^5 z_a,$$

et l'on voit que la valeur absolue de la différence $R-r$

est moindre que le plus grand des deux nombres positifs δ et

$$\delta' + \frac{3.648000}{\pi}\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\operatorname{tang}^5 z_a = \delta'',$$

lequel nombre a dès lors besoin d'être fixé, puisque c'est le seul dont nous ayons à tenir compte. Or, lorsque $\operatorname{tang} z_a$ est très grand ou z_a très près d'un droit, on a évidemment $\delta < \delta''$; et l'on s'assure qu'il en est toujours de même, quel que soit z_a, en faisant voir que l'on a

$$\frac{2}{3}\alpha^2 + 4\alpha\frac{\beta}{a} + \frac{9}{2}\alpha^2\frac{\beta}{a} < 6(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2,$$

ce qui est presque évident, car l'inégalité

$$a + D < \frac{\beta}{\alpha},$$

vérifiée dans le paragraphe précédent, entraîne la suivante, $\alpha < \frac{\beta}{a}$, et celle-ci donne

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\alpha^2 + 4\alpha\frac{\beta}{a} + \frac{9}{2}\alpha^2\frac{\beta}{a} \\
&\quad < \frac{2}{3}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + \frac{9}{2}\alpha\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 < 6\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + 12\alpha\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \\
&\quad < 6(1+2\alpha)\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 < 6(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, en résumé, r, c'est-à-dire

$$\frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a\left[1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{a} - \operatorname{tang}^2 z_a\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{a}\right)\right],$$

représente une valeur approchée en plus ou en moins de la réfraction totale R, avec une approximation marquée par

$$\begin{aligned}
\delta'' = \frac{648000}{\pi}\alpha\operatorname{tang} z_a\Big\{&\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha\frac{\beta}{a} + \left[7\alpha\frac{\beta}{a} + 6(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\right]\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 z_a \\
&+ 3\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2\operatorname{tang}^4 z_a\Big\}.
\end{aligned}$$

En déterminant, comme on vient de le faire, une limite δ'' de l'erreur que l'on commet lorsqu'on remplace la réfraction vraie R par la quantité r que nous avons choisie pour sa valeur approchée, on a seulement préparé la solution du problème, seul utile dans les applications, qui a pour but de fixer les conditions sous lesquelles il faut opérer pour que l'approximation obtenue soit de l'ordre des grandeurs négligeables. Occuponsnous maintenant de ce qui reste à faire à ce sujet.

Reprenons l'expression de l'erreur δ'' et écrivons-la ainsi

$$\delta'' = \mathrm{A}\,\mathrm{tang}^5 z_a + \mathrm{B}'\,\mathrm{tang}^3 z_a + \mathrm{B}''\,\mathrm{tang}^3 z_a + \mathrm{C}\,\mathrm{tang}\, z_a,$$

en posant

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\sqrt{1-2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 = \mathrm{A},$$

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\,\frac{7}{6}\,\alpha\,\frac{\beta}{a} = \mathrm{B}',$$

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 = \mathrm{A}(1+2\alpha) = \mathrm{B}'',$$

$$\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\,\frac{\alpha}{6}\left(\alpha + 4\,\frac{\beta}{a}\right) = \mathrm{C}.$$

Les coefficients A, B, B', C dépendront des quantités α et β ou de H_0 et T_0, et varieront par conséquent avec l'état atmosphérique à l'instant et au lieu de l'observation. Cherchons les plus grandes valeurs qu'ils puissent prendre, et d'abord les plus grandes valeurs que puissent prendre α et $\frac{\beta}{a}$ en s'imposant, bien entendu, les conditions aux limites

$$0{,}63 < \mathrm{H}_0 < 0{,}789; \qquad -30 < \mathrm{T}_0 < 50$$

admises plus haut.

Toutes les notations et toutes les hypothèses dont on a fait jusqu'ici usage étant conservées, on sait que

$$\alpha = \frac{1}{2}(n_0'^2 - 1)\frac{H_0}{0,76}\frac{1}{1+MT_0}\frac{1}{1+mT_0},$$

$$\frac{\beta}{a} = p_0'(1+mT_0);$$

d'où, quels que soient H_0 et T_0,

$$\alpha < \frac{2,9439}{10^4}\,1,0382\,\frac{10}{8,8987}\,\frac{10}{9,9463},$$

$$\frac{\beta}{a} < \frac{1,2555}{10^3}\,1,1836.$$

Désignant donc par la caractéristique L les logarithmes théoriques et par la caractéristique l les logarithmes tabulaires, de sorte que l'on ait, pour un nombre quelconque N,

$$L.N - \frac{1}{10^7} < l.N < L.N + \frac{1}{10^7}$$

et

$$l.N - \frac{1}{10^7} < L.N < l.N + \frac{1}{10^7},$$

il viendra

$$L.\alpha < L.2,9439 - 4 + L.1,0382 + 2 - L.8,8987 - L.9,9463$$
$$< l.2,9439 - l.8,8987 - l.9,9463 - 2 + \frac{4}{10^7}$$

et

$$L.\frac{\beta}{a} < L.1,2555 - 3 + L\,1,1836$$
$$< l.1,2555 + l.1,1836 - 3 + \frac{2}{10^7};$$

mais les Tables de logarithmes donnent, comme on l'a dejà vu,

$$l.2,9439 = 0,4689231,$$
$$l.1,0382 = 0,0162810,$$
$$l.8,8987 = 0,9493266,$$
$$l.9,9463 = 0,9976616,$$
$$l.1,2555 = 0,0988167,$$
$$l.1,1836 = 0,0732050;$$

donc

$$L.\alpha < \bar{4},5382163$$

et

$$L\frac{\beta}{a} < \bar{3},1720219,$$

par conséquent,

$$l.\alpha < \bar{4},5382164 \quad \text{et} \quad l.\frac{\beta}{a} < \bar{3},1720220,$$

$$\alpha < 0,00034532 \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{a} < 0,0014861.$$

Connaissant une limite supérieure de α et une limite supérieure de $\frac{\beta}{a}$, on en déduit sur-le-champ une limite supérieure de chacun des nombres

$$1 - 2\alpha, \quad \frac{1}{6}\alpha, \quad \frac{7}{6}\alpha = \alpha + \frac{1}{6}\alpha, \quad \alpha + 4\frac{\beta}{a},$$

qui entrent en facteurs dans A, B, B′, C, et l'on trouve

$$1 - 2\alpha < 1,0007,$$
$$\frac{\alpha}{6} < 0,000057554 = \frac{5,7554}{10^5},$$
$$\frac{7\alpha}{6} < 0,00040288 = \frac{4,0288}{10^4},$$
$$+ 4\frac{\beta}{a} < 0,0062898 = \frac{6,2898}{10^3};$$

d'où

$$L(1+2\alpha) < 0,000304,$$

$$L\sqrt{1+2\alpha} < 0,000152,$$

$$L(1+2\alpha)^{\frac{3}{2}} < 0,000456,$$

$$L\frac{\alpha}{6} < \bar{5},7600756,$$

$$L\frac{7\alpha}{6} < \bar{4},6051758,$$

$$L\left(\alpha - 4\frac{\beta}{a}\right) < \bar{3},7986369.$$

Observant encore que $\frac{648000}{\pi}$ est compris entre 206264 et 206265, on a

$$\frac{3.648000}{\pi}\alpha < 618795.0,00034532 = 6,18795 \times 10^5 \frac{3,4532}{10^4};$$

mais on a vu plus haut que $L.3,4532$ est inférieur à $0,5382163$; d'ailleurs on trouve

$$L.6,18795 < 0,7915470.$$

donc

$$L\frac{3.648000}{\pi}\alpha < 2,3297633.$$

Tout ceci étant posé, il en résulte

$$\begin{aligned} L.A &< L\frac{3.648000}{\pi}\alpha\sqrt{1+2\alpha}\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \\ &< L\frac{3.648000}{\pi}\alpha + \frac{1}{2}L(1+2\alpha) + 2L\frac{\beta}{a} \\ &< 2,3297633 + 0,0001520 + \bar{6},3440438 \end{aligned}$$

ou

$$L.A < \bar{4},6739591.$$

Puis

$$\begin{aligned} L.B' = L\frac{3.648000}{\pi}\alpha\frac{7}{6}\alpha\frac{\beta}{a} &< L.\frac{3.648000}{\pi}\alpha - L\frac{7}{6}\alpha + L\frac{\beta}{a} \\ &< 2,3297633 + \bar{4},6051758 + \bar{3},1720219. \end{aligned}$$

ou

$$L.B' < \bar{4},1069610.$$

Puis

$$L.B'' = L.A(1+2\alpha) = L.A + L(1+2\alpha)$$
$$< \bar{4},6739591 + 0,0003040;$$

ou

$$L.B'' < \bar{4},6724731.$$

Et enfin

$$L.C = L\,\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha\,\frac{\alpha}{6}\left(\alpha + 4\,\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$< L\,\frac{3.648000}{\pi}\,\alpha + L\,\frac{\alpha}{6} + L\left(\alpha + 4\,\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$< 2,3297633 + \bar{5},7600756 + \bar{3},7986369$$

ou

$$L.C < \bar{5},8884758.$$

Les calculs qui précèdent font connaître, par leurs logarithmes, des nombres respectivement supérieurs à toutes les valeurs que prennent les quatre coefficients A, B, B′, C lorsqu'on donne à la hauteur barométrique H_0 et à la température T_0 tous les systèmes de valeurs que nous sommes convenus de considérer. Supposons maintenant qu'on ait substitué ces nombres aux coefficients A, B, B′, C eux-mêmes dans l'expression de l'erreur δ'' : celle-ci deviendra une fonction de la seule distance zénithale apparente z_a, et cette fonction, qui se réduira à une fonction entière et impaire de $\tang z_a$, à coefficients positifs, pourra prendre toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini, en variant d'ailleurs dans le même sens que $\tang z_a$ ou z_a; donc quelques essais suffiront pour déterminer une valeur de z_a, telle que cette valeur et les valeurs moindres donnent pour l'erreur δ'' des résultats de même ordre que les quantités considérées comme négligeables, ce qui est le but que nous voulons atteindre. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Prenons pour valeur maximum de z_a, $z_a = 80^\circ$.

Les Tables de logarithmes donnent

$$l\,\text{tang}\,80^\circ = 0,7536812\,;$$

d'où

$$\text{L}\,\text{tang}\,80^\circ < 0,7536813,$$

$$\text{L}\,\text{tang}^3\,80^\circ < 2,2610439,$$

$$\text{L}\,\text{tang}^5\,80^\circ < 3,7684065,$$

donc

$$\text{L}.\text{A}\,\text{tang}^5\,80^\circ < 3,7684065 - \bar{4},6739591 = 0,4423656\,;$$

d'où

$$\text{A}\,\text{tang}^5\,80^\circ < 2,7693.$$

Puis

$$\text{L}.\text{B}'\,\text{tang}^3\,80^\circ < 2,2610439 + \bar{4},1069610 = \bar{2},3680049\,;$$

d'où

$$\text{B}'\,\text{tang}^3\,80^\circ < 0,023335.$$

Puis

$$\text{L}.\text{B}''\,\text{tang}^3\,80^\circ < 2,2610439 + \bar{4}.6742731 = \bar{1},9353170\,;$$

d'où

$$\text{B}''\,\text{tang}^3\,80^\circ < 0,086162.$$

Puis

$$\text{L}.\text{C}\,\text{tang}\,80^\circ < 0,7536812 + \bar{5},8884758 = \bar{4},6421571\,;$$

d'où

$$\text{C}\,\text{tang}\,80^\circ < 0,0004387\,;$$

et enfin

$$\delta'' < 2,7693 - 0,023335 + 0,086162 + 0,0004387 < 2,88.$$

où l'unité est la seconde d'angle.

Cette erreur δ'' commise sur la réfraction R quand on considère celle-ci comme égale à r est sensiblement supérieure à celle des observations même les plus médiocres ; nous la regarderons comme insuffisante, ce qui nous obligera à abaisser la limite de z_a que nous avions prise égale à 80°. Faisons donc en second lieu $z_a \overline{\overline{<}} 70°$: nous aurons

$$l.\text{tang}\, z_a \overline{\overline{<}}\, l.\text{tang}\, 70° \overline{\overline{<}}\, 0,4389341;$$

d'où

$$\text{L.tang}\, 70° < 0,4389342,$$
$$\text{L.tang}^3 70° < 1,3168026,$$
$$\text{L.tang}^5 70° < 2,1946710;$$

donc

$$\text{L.A tang}^5 70° < 2,1946710 + \bar{4},6739591 = \bar{2},8686301;$$

d'où

$$\text{A tang}^5 70° < 0,073898.$$

Puis

$$\text{L.B}'\text{tang}^3 70° < 1,3168026 + \bar{4},1069160 = \bar{3},4237636;$$

d'où

$$\text{B}'\text{tang}^3 70° < 0,0026532.$$

Puis

$$\text{L.B}''\text{tang}^3 70° < 1,3168026 + \bar{4},6742731 = \bar{3},9910757;$$

d'où

$$\text{B}''\text{tang}^3 70° < 0,0097967.$$

Puis

$$\text{L.C tang}\, 70° < 0,4389342 + \bar{5},8844758 = \bar{4},3274100;$$

d'où

$$\text{C tang}\, 70° < 0,00021253.$$

et enfin

$$\begin{aligned}\delta'' &< 0,073898 + 0,0026532 \\ &\quad + 0,00097967 + 0,00021253 < 0,087.\end{aligned}$$

Cette erreur est à peu près celle qui se rapporte aux observations les plus parfaites : nous ne pensons pas qu'il soit nécessaire d'exiger qu'elle soit atteinte à cause de la grande étendue des distances zénithales que la condition $z_a < 70°$ obligerait d'écarter. Il vaut mieux augmenter la valeur maximum de z_a, poser par exemple

$z_a < 75^\circ$, ce qui laissera encore δ'' suffisamment petit, comme on va le voir. Nous avons ici

$$z_a \leq 75^\circ,$$

par suite

$$\begin{aligned}
l.\mathrm{tang}\, z_a &< l.\mathrm{tang}\, 75^\circ = 0,5719475,\\
\mathrm{L.tang}\, 75^\circ &< 0,5719476,\\
\mathrm{L.tang}^3\, 75^\circ &< 1,7158428,\\
\mathrm{L.tang}^5\, 75^\circ &< 2,8597380;
\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{L.A\,tang}^5\, 75^\circ < 2,8597380 + \bar{4},6739591 = \bar{1},5336971;$$

d'où

$$\mathrm{A\,tang}^5\, 75^\circ < 0,34175.$$

Puis

$$\mathrm{L.B'\,tang}^3\, 75^\circ < 1,7158428 + \bar{4},1069610 = \bar{3},8228038;$$

d'où

$$\mathrm{B'\,tang}^3\, 75^\circ < 0,0066498.$$

Puis

$$\mathrm{L.B''\,tang}^3\, 75^\circ < 1,7158428 + \bar{4},6742731 = \bar{2},3901159;$$

d'où

$$\mathrm{B''\,tang}^3\, 75^\circ < 0,024554.$$

Puis

$$\mathrm{L.C\,tang}\, 75^\circ < 0,5719476 + \bar{5},8884758 = \bar{4},4604234;$$

d'où

$$\mathrm{C\,tang}\, 75^\circ < 0,00028869,$$

et enfin

$$\delta'' < 0,34175 + 0,0066498 + 0,024554 + 0,00028869 < 0'',3733,$$

c'est-à-dire une quantité suffisamment petite pour la plupart des cas.

§ VIII. — Simplification du calcul des valeurs approchées r de la réfraction totale R, pour les différentes valeurs de H_0 comprises entre 0,63 et 0,794 et les différentes valeurs de T_0 comprises entre -30° et 50°.

Soient r' et r'' deux valeurs de r correspondant à une même valeur de la distance zénithale z_a et à deux systèmes différents H'_0 et T'_0, H''_0 et T''_0 de valeurs de la hauteur barométrique et de la température au moment et au lieu de l'observation, ces deux systèmes de valeurs satisfaisant, bien entendu, aux conditions limites convenues.

Nous aurons d'abord, comme on sait,

$$r' = \frac{648000}{\pi}\alpha' \operatorname{tang} z_a \left[1 + \frac{\alpha'}{2}(\operatorname{tang}^2 z_a - 1) - \frac{\beta'}{a}(\operatorname{tang}^2 z_a + 1)\right],$$

$$r'' = \frac{648000}{\pi}\alpha'' \operatorname{tang} z_a \left[1 - \frac{\alpha''}{a''}(\operatorname{tang}^2 z_a - 1) - \frac{\beta''}{a}(\operatorname{tang}^2 z_a + 1)\right],$$

avec

$$\alpha' = \frac{1}{2}(n'^2_0 - 1)\frac{H'_0}{0,76}\frac{1}{1+m\mathrm{T}'_0}\frac{1}{1+\mathrm{MT}_0},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{2}(n'^2_0 - 1)\frac{H''_0}{0,76}\frac{1}{1-m\mathrm{T}'_0}\frac{1}{1+\mathrm{MT}''_0},$$

$$\frac{\beta'}{a} = p'_0(1+m\mathrm{T}'_0),$$

$$\frac{\beta''}{a} = p'_0(1+\mathrm{MT}''_0).$$

Retranchons membre à membre de l'équation qui détermine r'' celle qui détermine r' préalablement multipliée par

$$\frac{H''_0}{H'_0}\,\frac{1+m\mathrm{T}'_0}{1+m\mathrm{T}''_0}\,\frac{1+\mathrm{MT}'_0}{1+\mathrm{MT}''_0} = \frac{\alpha''}{\alpha'},$$

il viendra

$$r'' = r'_1 + \delta'''.$$

en posant, pour abréger,

$$r' \frac{H'_0}{H_0} \frac{1 - mT'_0}{1 - mT_0} \frac{1 - MT'_0}{1 + MT'_0} = r'_1$$

et

$$\frac{648000}{\pi} \alpha'' \operatorname{tang} z_a \left[\frac{1}{2} (\alpha'' - \alpha')(\operatorname{tang}^2 z_a - 1) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\beta''}{a} - \frac{\beta'}{a} \right) (\operatorname{tang}^2 z_a + 1) \right] = \delta''';$$

cela prouve que r'_1 représente une valeur approchée en plus ou en moins de r'', avec un degré d'approximation marqué par la valeur absolue de δ''', et que s'il est permis de regarder cette valeur absolue comme étant de l'ordre des grandeurs négligeables, la valeur numérique de r'', égale à celle de r'_1, se déduira de celle de r' par un calcul très simple.

Cherchons donc une limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur δ''' et d'abord une limite supérieure des valeurs absolues des deux différences $\frac{\beta''}{a} - \frac{\beta'}{a}$, $\alpha'' - \alpha'$.

Appelons δH_0 et δT_0 les valeurs absolues des différences $H'_0 - H'_0$, $T'_0 - T'_0$, en sorte que l'on ait

$$H'_0 = H'_0 - \delta H_0, \qquad T_0 = T'_0 + \delta T_0,$$

et écrivons les égalités

$$\frac{\beta}{a} = p'_0 (1 + mT_0)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (n_0^2 - 1) \frac{H_0}{0,76} \frac{1}{1 + mT_0} \frac{1}{1 + MT_0},$$

qui définissent les valeurs générales de $\frac{\beta}{a}$ et de α, la première nous donnera immédiatement

$$\frac{\beta'' - \beta'}{a} = p'_0 \, \delta T_0 < 0,0012555 \, m \, \delta T_0$$

Le signe du premier membre étant celui qui le rend positif, la seconde ou plutôt la suivante

$$L\alpha = L\frac{1}{2}(n_0'^2 - 1) + L\frac{H_0}{0,76} - L(1 - mT_0) - L(1 + MT_0),$$

qui s'en déduit, en prenant les logarithmes népériens de ses deux membres, donne

$$\begin{aligned} L\alpha'' - L\alpha' = LH_0'' - LH_0' &- [L(1 + mT_0'') - L(1 + mT_0')] \\ &- [L(1 + MT_0'') - L(1 + MT_0')]; \end{aligned}$$

par suite, d'après le théorème connu sur les accroissements des fonctions,

$$\frac{\alpha'' - \alpha'}{\alpha'''} = \frac{H_0'' - H_0'}{H_0'''} - \frac{m(T_0'' - T_0')}{1 + mT_0'''} - \frac{M(T_0'' - T_0')}{1 + MT_0^{\text{IV}}},$$

α''' étant un nombre compris entre α' et α'', par conséquent moindre que la limite supérieure de α que nous avons trouvée plus haut égale à 0,00034532, H_0''' un nombre compris entre H_0' et H_0'' et, *a fortiori*, entre 0,63 et 0,795; enfin, T_0''' et T_0^{IV} des nombres compris entre T_0' et T_0'' et, *a fortiori*, entre -30 et 50, ce qui donne $1 + mT_0'''$ compris entre 0,88987 et 1,1836, et $1 + MT_0^{\text{IV}}$ compris entre 0,99463 et 1,00895; de là on conclut

$$\pm(\alpha'' - \alpha') < 0,00034532\left(\frac{\delta H_0}{0,63} + \frac{m\,\delta T_0}{0,88987} + \frac{M\,\delta T_0}{0,99463}\right),$$

le signe du premier membre étant celui qui le rend positif.

Connaissant une limite supérieure de chacune des différences $\alpha'' - \alpha'$, $\frac{\beta''}{a} - \frac{\beta'}{a}$, prise en valeur absolue, il suffit de les associer avec les valeurs maxima de $\frac{648000}{\pi}$, α'', z_a qui sont respectivement 206265, 0,00034532, 75°

et l'on trouve pour la limite de l'erreur δ'''

$$\delta''' < 206265.0.00034532\,\tfrac{1}{2}\,0,00034532 \times \tan 75^\circ \frac{\cos 30^\circ}{\cos^2 75^\circ}\left(\frac{\delta H_0}{0,63} - \frac{m\,\delta T_0}{0,88987} - \frac{M\,\delta T_0}{0,99463}\right) + 206265.0,00034532 \times \frac{\tan 75^\circ}{\cos^2 75^\circ}\,m\,\delta T_0$$

ou, pour abréger,

$$\delta''' < P\left(\frac{\delta H_0}{0,63} - \frac{m\,\delta T_0}{0,88987} - \frac{M\,\delta T_0}{0,99463}\right) + Q\,m\,\delta T_0,$$

en posant

$$206265.0,00034532 \cdot \frac{1}{2}\,0,00034532 \cdot \frac{\tan 75^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 75^\circ} = P,$$

$$206265.0,00034532\,\frac{\tan 75^\circ}{\cos^2 75^\circ} = Q$$

Mais si dans P on remplace 206265 par 3.206265 et $\frac{1}{2}\,0,00034532$ par $\frac{1}{6}\,0,00034532$, la plupart des facteurs qui entreront, soit dans P, soit dans Q, seront compris parmi les nombres qui ont déjà figuré dans les calculs numériques du paragraphe précédent, sous la dénomination de $\frac{3.648000}{\pi}$, α, $\frac{\alpha}{6}$, $\frac{p_0}{\alpha\rho_0}$ et dont les logarithmes sont respectivement

$$5,7915470,\quad \bar{4},5382163,\quad \bar{5},7600756,\quad \bar{3},0988168;$$

quant aux facteurs

$$\frac{\tan 75^\circ}{\cos^2 75^\circ},\quad \frac{\tan 75^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 75^\circ},\quad 206265,$$

dont il n'a pas encore été question, on trouve sur-le-champ,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}.\tan 75^\circ && < 0,5719467,\\
&\mathrm{L}.\cos 75^\circ && < \bar{1},4129961,\\
&\mathrm{L}.\cos 30^\circ && < \bar{1},9375307,\\
&\mathrm{L}\,\frac{\tan 75^\circ}{\cos^2 75^\circ} && \phantom{<}\ 1,7459554,\\
&\mathrm{L}\,\frac{\tan 75^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 75^\circ} && < 1,6834861,\\
&\mathrm{L}.206265 && < 5,3144150;
\end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
L.P &< 2,3297633 + \bar{5},7600756 + 1,6834861 = \bar{1},7733250,\\
L.Q &< 5,3144150 + \bar{4},5382163\\
&\quad + \bar{3},0988168 + 1,7459554 = 0,6974142.
\end{aligned}$$

Les calculs qui précèdent font connaître par leurs logarithmes des nombres respectivement supérieurs aux valeurs des coefficients numériques P et Q. Mais la connaissance de ces nombres ne suffit pas pour donner immédiatement la valeur limite de δ''', ce qui est le seul résultat utile. Cela tient à ce que δ''' dépend des différences δH_0 et δT_0 dont on n'a pas encore fixé les valeurs et que l'on sait seulement devoir être assez petites pour que δ''', qui en est une fonction linéaire et homogène, soit de l'ordre des grandeurs négligeables, et en même temps assez grandes pour qu'on n'ait à considérer qu'un petit nombre de groupes de deux états atmosphériques répondant aux valeurs H'_0, T'_0 et H''_0, T''_0 de H_0, T_0.

Or, après quelques tâtonnements qui se présentent d'ailleurs d'eux-mêmes, on reconnaît que le but est atteint en posant

$$\delta H_0 \lesseqgtr 0,76 - 0,63 = 0,13 > 0,789 - 0,76$$

et, en même temps,

$$\delta T_0 \lesseqgtr 20^\circ.$$

En effet, m et M étant respectivement moindres que 0,003671 et 0,000179, nous aurons

$$\frac{\delta H_0}{H_0} < \frac{13}{63} < 0,20635, \qquad m\,\delta T_0 < 0,07342 = \frac{7,342}{10^2},$$

$$\frac{m\,\delta T_0}{0,88987} < \frac{7,342}{8,8987.10}, \qquad \frac{M\,\delta T_0}{0,99463} < \frac{0,003580}{0,99463} = \frac{3,58}{9,9463.10^3},$$

d'où

$$L\frac{\delta H_0}{H_0} < L.2,0365 - 1 < \bar{1},3146046,$$

$$L.m\,\delta T_0 < L.7,342 - 2 < \bar{2},8658145,$$

$$L\frac{m\,\delta T_0}{0,88987} < L.7,342 - L.8,8987 - 1$$
$$< 0,8658145 - 0,9493265 - 1 = \bar{2},9164880.$$

$$L\frac{M\,\delta T_0}{0,99463} < L.3,58 - L.9,9463 - 2$$
$$< 0,5538831 - 0,9976615 - 2 = \bar{3},5562216,$$

puis

$$L.P\frac{\delta H_0}{H_0} = L.P + L.\frac{\delta H_0}{H_0}$$
$$< \bar{1},7733250 + \bar{1},3146046 = \bar{1},0879296,$$

d'où

$$P\frac{\delta H_0}{H_0} < 0,12245.$$

Puis

$$L.P\frac{m\,\delta T_0}{0,88987} = L.P + L\frac{m\,\delta T_0}{0,88987}$$
$$< \bar{1},7733250 + \bar{2},9164880 = \bar{2},6898130,$$

d'où

$$P\frac{m\,\delta T_0}{0,88987} < 0,048957.$$

Puis

$$L.P\frac{M\,\delta T_0}{0,99463} = L.P + L\frac{M\,\delta T_0}{0,99463}$$
$$< \bar{1},7733250 + \bar{3},5562216 = \bar{3},3295468,$$

d'où

$$P\frac{M\,\delta T_0}{0,99463} < 0,0021358.$$

Puis

$$L.Q\,m\,\delta T_0 = L.Q + L\,m\,\delta T_0$$
$$< 0,6974142 + \bar{2},8658145 = \bar{1},5632287.$$

d'où

$$Q\,m\,\delta T_0 < 0,36579;$$

et enfin

$$\delta''' < 0,12245 + 0,048957 + 0,0021358 + 0,36579.$$

Cette erreur ajoutée à celle qui a été déjà commise en prenant r au lieu de R et que l'on sait être moindre que 0,37323 donne 0,91256, c'est-à-dire une quantité inférieure à $1''$ d'angle; nous conviendrons de regarder cette erreur totale comme une quantité négligeable, quoiqu'elle soit sensiblement supérieure aux erreurs des observations actuelles. Cela posé, voici la marche qu'il convient de suivre pour obtenir la réfraction correspondant à un état atmosphérique quelconque que nous regarderons comme celui auquel se rapportent les valeurs H''_0, T''_0 de H_0, T_0. Considérons les trois états atmosphériques que nous appellerons *fondamentaux* et pour lesquels on a respectivement

$$\begin{array}{ll} H_0 = 0{,}76, & T_0 = -30°; \\ H_0 = 0{,}76, & T_0 = 10°; \\ H_0 = 0{,}76, & T'_0 = 50°, \end{array}$$

et évaluons directement la réfraction r relative à chacun d'eux au moyen de la formule générale

$$r = \frac{648000}{\pi}\,\alpha \tang z_a \left[1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{a} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{a}\right)\tang^2 z_a\right].$$

Regardons ensuite successivement chacun de ces trois états atmosphériques comme étant celui qui a été défini plus haut par les valeurs H'_0, T'_0 de H_0 et de T_0. Si l'on choisit le premier, on voit que la réfraction cherchée r'' pourra être calculée par la formule

$$r'' = r'_1 = r' \frac{H''_0}{0{,}76}\,\frac{1 - 30m}{1 + mT''_0}\,\frac{1 - 30M}{1 - MT''_0},$$

toutes les fois que T'_0 sera compris entre -30 et -10, H''_0 étant d'ailleurs quelconque ou plutôt compris entre 0,63 et 0,789, car les différences $H''_0 - H'_0$ et $T''_0 - T'_0$ satisferont bien aux conditions

$$\pm(H''_0 - H'_0) = \delta H_0 < 0{,}13, \qquad \pm(T''_0 - T'_0) = \delta T_0 < 20.$$

Si l'on choisit le second état atmosphérique, on aura

$$r'' = r' \frac{H''_0}{0,76} \frac{1 + 10m}{1 + mT''_0} \frac{1 + 10M}{1 + MT''_0},$$

pourvu que T''_0 soit compris entre -10 et $+30$.

Enfin, si l'on choisit le troisième état atmosphérique, celui pour lequel on a $T'_0 = 50$, on aura

$$r'' = r' \frac{H''_0}{0,76} \frac{1 + 50m}{1 + mT'_0} \frac{1 + 50M}{1 + MT'_0},$$

pourvu que T''_0 soit compris entre 30^o et 50^o.

Ainsi, quelle que soit la valeur de T''_0 entre -30 et 50 et la valeur de H''_0 entre $0,63$ et $0,789$, la réfraction cherchée r'' pourra être calculée au moyen de la formule

$$r'' = r' \frac{H''_0}{H'_0} \frac{1 + mT'_0}{1 + mT''_0} \frac{1 + MT'_0}{1 + MT''_0},$$

et le résultat sera obtenu à moins d'une seconde près en plus ou en moins.