

P. APPELL

**Sur les valeurs approchées des  
polynômes de Bernoulli**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 6  
(1887), p. 547-554

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1887\\_3\\_6\\_547\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6_547_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SUR LES VALEURS APPROCHÉES DES POLYNOMES  
DE BERNOULLI;**

PAR M. P. APPELL.

---

1. Dans une Note précédente (<sup>1</sup>), nous avons indiqué les principales propriétés des polynômes de Bernoulli  $\varphi_p(x)$  qui, pour des valeurs entières positives de  $x$ ,

---

(<sup>1</sup>) *Nouvelles Annales*, p. 312 du présent Volume.

expriment la somme des  $p^{\text{ièmes}}$  puissances des  $x$  premiers nombres entiers

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= x, & \varphi_1(x) &= \frac{x(x+1)}{2}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}, & \dots\end{aligned}$$

Nous nous proposons maintenant de chercher une valeur approchée du polynôme  $\varphi_p(x)$  quand  $p$  est très grand, et, pour cela, nous suivrons une méthode générale qui a été donnée par M. Darboux dans un Mémoire *Sur l'approximation de fonctions de très grands nombres* (*Journal de Liouville*, 3<sup>e</sup> série, t. IV; 1878).

La fonction de  $z$

$$(1) \quad f(z) = \frac{e^{z(x+1)} - 1}{e^z - 1}$$

est *holomorphe* (c'est-à-dire est uniforme, finie, et admet une dérivée) pour toutes les valeurs de  $z$  dont le module est inférieur à  $2\pi$ ; en effet, cette fonction devient infinie aux seuls points

$$z = \pm 2\pi i, \quad z = \pm 4\pi i, \quad \dots, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

On peut donc développer  $f(z)$  par la formule de Mac-laurin en une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de  $z$  convergente dans le cercle de rayon  $2\pi$ . Si l'on calcule les coefficients de ce développement, on voit que le coefficient de  $\frac{z^p}{1 \cdot 2 \dots p}$  est un polynôme en  $x$  qui se réduit à

$$1^p + 1^p + 3^p + \dots + x^p$$

quand  $x$  est entier et positif : ce coefficient est donc le polynôme  $\varphi_p(x)$ , et l'on peut écrire

$$(2) \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{p=\infty} \frac{z^\nu}{1 \cdot 2 \dots \nu} \varphi_\nu(x).$$

Le fait que le coefficient de  $\frac{z^p}{1.2\dots p}$  se réduit à la somme des  $p^{\text{ièmes}}$  puissances des  $x$  premiers entiers quand  $x$  est entier et positif, résulte immédiatement de ce que, si  $x$  est un entier positif,  $e^{z(x+1)} - 1$  est divisible par  $e^z - 1$ , et qu'on a, dans ce cas,

$$f(z) = 1 + e^z + e^{2z} + \dots + e^{xz}.$$

Cela posé, on peut toujours déterminer deux constantes A et B, de telle façon que la différence

$$(3) \quad \psi(z) = f(z) - \frac{A}{z - 2\pi i} - \frac{B}{z + 2\pi i}$$

reste finie, quel que soit  $x$ , pour  $z = 2\pi i$  et pour  $z = -2\pi i$ . En effet, le produit

$$(z - 2\pi i) f(z) = \frac{z - 2\pi i}{e^z - 1} [e^{z(x+1)} - 1]$$

est une fonction de  $z$  holomorphe dans le voisinage de  $z = 2\pi i$  : par suite, pour des valeurs de  $z$  voisines de  $2\pi i$ , cette fonction est développable par la formule de Taylor, en une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de  $(z - 2\pi i)$ ,

$$(4) \quad (z - 2\pi i) f(z) = A + A_1(z - 2\pi i) + A_2(z - 2\pi i)^2 + \dots,$$

où A est la valeur que prend le produit  $(z - 2\pi i) f(z)$  pour  $z = 2\pi i$ ,

$$A = e^{2\pi i(x+1)} - 1 = e^{2\pi xi} - 1 = i \sin 2\pi x - 2 \sin^2 \pi x.$$

Il résulte alors du développement (4) que la différence

$$f(z) - \frac{A}{z - 2\pi i} = A_1 + A_2(z - 2\pi i) + \dots$$

reste finie pour  $z = 2\pi i$ . On verra de même que, en prenant pour B la valeur du produit  $(z + 2\pi i) f(z)$  pour

$z = -2\pi i$ , à savoir

$$B = e^{-2\pi i(x+1)} - 1 = -i \sin 2\pi x - 2 \sin^2 \pi x,$$

la différence

$$f(z) - \frac{B}{z - 2\pi i}$$

reste finie quand  $z$  tend vers  $-2\pi i$ .

Les constantes  $A$  et  $B$  étant ainsi déterminées, la différence (3) appelée  $\psi(z)$  est finie aux deux points  $\pm 2\pi i$ . La fonction  $\psi(z)$  ne devient plus infinie qu'aux points  $\pm 4\pi i, \pm 6\pi i, \dots$  : elle est donc développable, par la formule de Maclaurin, pour les valeurs de  $z$  dont le module est inférieur à  $4\pi$ , et l'on a, pour ces valeurs,

$$\psi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots$$

Cette série est convergente, en particulier pour  $z = z\pi$ , et l'on a

$$\lim (2\pi)^p a_p = 0 \quad (p = \infty),$$

puisque le terme général d'une série convergente a pour limite zéro.

Écrivons alors l'identité (3) sous la forme

$$f(z) = \psi(z) + \frac{A}{z - 2\pi i} + \frac{B}{z + 2\pi i},$$

et, en supposant le module de  $z$  inférieur à  $2\pi$ , développons les deux membres suivant les puissances positives croissantes de  $z$  : les coefficients de  $z^p$  devant être les mêmes dans les deux membres, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_p(x)}{1 \cdot 2 \dots p} &= a_p = \frac{A - (-1)^p B}{(2\pi i)^{p+1}} \\ &= - [A - (-1)^p B] \frac{(1 + \varepsilon_p)}{(2\pi i)^{p+1}} \end{aligned}$$

en désignant par  $\varepsilon_p$  la quantité

$$\varepsilon_p = - \frac{a_p (2\pi i)^{p+1}}{A - (-1)^p B}$$

qui tend vers zéro quand  $p$  croît indéfiniment, d'après la remarque faite plus haut sur le produit  $(2\pi)^p a_p$ . D'après cela, en remplaçant A et B par leurs valeurs et distinguant les deux cas de  $p$  impair et de  $p$  pair, on a, pour les valeurs approchées de  $\varphi_p(x)$  quand  $p$  est très grand,

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1) \frac{\sin^2 \pi x}{2^{2n} \pi^{2n+2}} (1 + \varepsilon_{2n+1}), \\ \varphi_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n \frac{\sin 2\pi x}{2^{2n} \pi^{2n+1}} (1 + \varepsilon_{2n}). \end{cases}$$

Lorsque  $x$  est entier, les quantités appelées A et B sont nulles et, par suite, la quantité appelée  $\varepsilon_p$  est infinie : les formules deviennent illusoires à partir du moment où l'on a introduit  $\varepsilon_p$ .

Ces formules (5) pourraient aussi se déduire des développements en série trigonométrique que donne Raabe dans le Tome 42 du *Journal de Crelle* pour les polynômes  $\varphi_p(x)$ . Il serait trop long de reproduire ici ces développements; je me bornerai à rappeler que M. Hermite a indiqué, dans le Tome 79 du *Journal de Crelle*, une méthode très simple pour les obtenir.

2. Ces résultats permettent, dans beaucoup de cas, de reconnaître la convergence ou la divergence de séries ordonnées suivant les polynômes  $\varphi_p(x)$ . Si nous prenons, par exemple, la série

$$S = \frac{1}{z} + \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) \varphi_0(x) + \left[ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+1)^2} \right] \varphi_1(x) + \dots \\ + \left[ \frac{1}{z^n} - \frac{1}{(z+1)^n} \right] \varphi_{n-1}(x) + \dots$$

que nous avons considérée dans notre précédent article, nous avons facilement le résultat suivant :

*La série S est convergente quand x est un nombre entier positif ou négatif dont la valeur absolue est plus petite que celui des modules de z et de z + 1 qui est le plus petit; elle a alors pour somme  $\frac{1}{z-x}$ . Cette série est divergente pour toute autre valeur de x.*

Pour le montrer, supposons d'abord que x soit un nombre entier positif; nous aurons

$$\varphi_p(x) = 1 + 2^p + 3^p + \dots + x^p,$$

et la somme  $S_n$  des n premiers termes de la série S peut s'écrire

$$\begin{aligned} S_n = & \frac{1}{z} + \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} \right) \\ & + \left( \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{z^n} \right) \\ & - \left( \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \dots + \frac{3^{n-1}}{z^n} \right) + \dots \\ & - \left( \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{z^n} \right) \\ & - \left[ \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \dots + \frac{1}{(z+1)^n} \right] \\ & - \left[ \frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{(z+1)^n} \right] \\ & - \left[ \frac{1}{z+1} + \frac{3}{(z+1)^2} + \dots + \frac{3^{n-1}}{(z+1)^n} \right] - \dots \\ & - \left[ \frac{1}{z+1} + \frac{x}{(z+1)^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(z+1)^n} \right], \end{aligned}$$

où les parenthèses sont des progressions géométriques dont les raisons respectives

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{2}{z}, \quad \frac{3}{z}, \quad \dots, \quad \frac{x}{z}, \quad \frac{1}{z+1}, \quad \frac{2}{z+1}, \quad \dots, \quad \frac{x}{z+1}$$

ont toutes, d'après l'hypothèse, des modules moindres que l'unité. Si donc on fait croître  $n$  indéfiniment, toutes ces progressions sont convergentes et l'on trouve

$$S = \lim S_n = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \dots \\ + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} - \dots - \frac{1}{z-x+1},$$

c'est-à-dire, en réduisant,

$$S = \lim S_n = \frac{1}{z-x}.$$

Si  $x$  est un entier *négatif*, tel que les modules de  $\frac{x}{z}$  et  $\frac{x}{z+1}$  soient tous deux moindres que l'unité, on vérifie sans peine, en appliquant la même méthode et s'appuyant sur les relations

$$\varphi_0(-x) = -\varphi_0(x), \\ \varphi_p(-x) = (-1)^{p+1} \varphi_p(x-1). \quad (p > 0),$$

que la série  $S$  est convergente et a pour somme  $\frac{1}{z-x}$ . Enfin, si  $x$  est nul, la série a évidemment pour somme  $\frac{1}{z}$ , c'est-à-dire encore  $\frac{1}{z-x}$ .

Mais il est très remarquable que, pour toute autre valeur de  $x$  (*non entière*), la série  $S$  est divergente, quel que soit  $z$ . En effet, dans ce cas, le terme de rang  $(2n+3)$  de cette série a pour valeur approchée, quand  $n$  est très grand,

$$(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1) \left[ \frac{1}{z^{2n+2}} - \frac{1}{(z+1)^{2n+2}} \right] \frac{4 \sin^2 \pi x}{(2\pi)^{2n+2}} (1 + \varepsilon_{2n+1});$$

et, à cause du facteur  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1)$ , ce terme *augmente indéfiniment* avec  $n$ , quel que soit  $z$ . La série  $S$  est donc divergente.

Il est évident que l'on pourra former une infinité



d'autres séries de polynômes  $\varphi_p(x)$  possédant la même propriété que la série  $S$ , c'est-à-dire convergentes pour certaines valeurs entières de  $x$  et divergentes pour toute autre valeur de  $x$ .