CH. BIEHLER

Sur les développements en séries des fonctions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 485-492

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__485_1>

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FONCTIONS RATIONNELLES;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Nous allons, dans ce qui suit, donner une démonstration élémentaire du théorème de Cauchy sur le développement en série d'une fonction, en nous bornant au cas où la fonction est algébrique et rationnelle. Nous établirons qu'une fonction algébrique rationnelle de x est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable pour toute valeur de x dont le module est inférieur à celui de la plus petite valeur de la variable pour laquelle la fonction devient infinie; la fonction n'est plus développable suivant les puissances ascendantes de x si le module de la variable dépasse cette valeur.

2. Nous allons démontrer d'abord le théorème dans

le cas simple où la fonction est de la forme $\frac{1}{x-a}$. On a identiquement

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$
$$= -\frac{1}{a}\left[1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\ldots+\frac{x^n}{a^n}-\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right]$$

supposons le module de $\frac{x}{a}$ inférieur à l'unité, la série obtenue sera convergente ; il suffit, pour montrer qu'il en est ainsi, de faire voir que le module du terme complémentaire $\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment.

On a, en effet, en désignant par ρ le module de $\frac{x}{a}$,

$$\operatorname{mod} \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)} < \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho};$$

ρ étant plus petit que l'unité, ρ^{n+1} a pour limite zéro, par suite aussi mod $\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ a pour limite zéro et la série est convergente.

Si le module $\frac{x}{a}$ est plus grand que 1, le module de la partie complémentaire augmente indéfiniment, car

$$\operatorname{mod} \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)} > \frac{\rho^{n+1}}{1+\rho}.$$

Or la fraction $\frac{\rho^{n+1}}{1-\rho}$ augmente indéfiniment avec n; la série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots + \frac{x^n}{a^n} + \ldots$$

est donc divergente; il en est de même quand $\rho = 1$.

Remarquons que, si $\rho < 1$, la série des modules des divers termes de la suite précédente est une série convergente, car c'est une progression géométrique dont la raison est moindre que l'unité.

3. Proposons-nous maintenant de développer en série $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, α étant un nombre entier.

A cet effet, considérons l'identité

$$\frac{1}{1-z} = 1 - z + z^2 + \ldots - z^{n+\alpha-1} + \frac{z^{n+\alpha}}{1-z}.$$

Prenons les dérivées d'ordre $\alpha - 1$ des deux membres, il viendra

$$\frac{(\alpha-1)!}{(1-z)^\alpha} = (\alpha-1)! - \frac{\alpha!}{1} z + \frac{(\alpha-1)!}{1.2} z^2 + \ldots$$
$$- \frac{(\alpha-n-1)!}{n!} z^n - z^{n+1} \frac{\Phi(z)}{(1-z)^\alpha}$$

ou bien

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = 1 - \alpha z - \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} z^2 - \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1)}{n!} z^n - \frac{z^{n+1}\Phi(z)}{(\alpha-1)!(1-z)^\alpha}.$$

Dans cette formule $\Phi(z)$ désigne un polynôme de degré $(\alpha - 1)$ dont les coefficients ne renferment n qu'à la puissance $\alpha - 1$ au plus. Le second membre représente le quotient de 1 par $(1 - z)^\alpha$ ordonné suivant les puissances croissantes de z et $\frac{z^{n+1}\Phi(z)}{(\alpha-1)!(1-z)^\alpha}$ est la partie complémentaire.

En remplaçant z par $\frac{x}{a}$, on obtient

$$\frac{(-1)^\alpha a^\alpha}{(x-a)^\alpha} = 1 - \alpha\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n + \frac{(\alpha-1)!\left(1-\frac{x}{a}\right)^\alpha}{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}\Phi\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Nous allons démontrer que, si le module de $\frac{x}{a}$ est inférieur à l'unité, la série

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &1+\alpha\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots \\ &+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n+\ldots \end{aligned} \right.$$

est convergente et représente $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^\alpha}$.

Pour le faire voir, il suffit de montrer que le terme complémentaire

$$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}\Phi\left(\frac{x}{a}\right)}{(\alpha-1)!\left(1-\frac{x}{a}\right)^\alpha}$$

a pour limite zéro.

Nous allons montrer pour cela que son module peut devenir plus petit que toute quantité donnée. Soit ρ le module de $\frac{x}{a}$.

Le module de $\Phi\left(\frac{x}{a}\right)$ est

$$< (n-\alpha)^{\alpha-1}[(1+\rho)^{\alpha-1}+\rho(1+\rho)^{\alpha-2}+\ldots+\rho^{\alpha-1}]$$

ou

$$\operatorname{mod}\Phi\left(\frac{x}{a}\right) < (n+\alpha)^{\alpha-1}\frac{(1+\rho)^{\alpha}-1}{\rho};$$

il suffit, pour le voir, de former l'expression de $\Phi\left(\frac{x}{a}\right)$.

Le module du terme complémentaire est donc moindre que

$$\rho^n(n+\alpha)^{\alpha-1}\frac{[(1+\rho)^{\alpha}-1]}{(\alpha-1)!(1-\rho)^{\alpha}};$$

le facteur $\frac{(1+\rho)^{\alpha}-1}{(\alpha-1)!(1-\rho)}$ est fini et $\rho^n(n+\alpha)^{\alpha-1}$ a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, ρ étant plus petit que 1; le terme complémentaire a donc pour limite zéro et la série (2) est convergente.

Remarquons que la série des modules des termes de la série (2) est aussi convergente. On a en effet

$$\frac{1}{(1-\rho)^{\alpha}} = 1 + \alpha\rho + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\rho^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\rho^n + \frac{\rho^{n+1}\Phi(\rho)}{(\alpha-1)?(1-\rho)^{\alpha}}.$$

Le terme $\frac{\rho^{n+1}\Phi(\rho)}{(\alpha-1)!(1-\rho)^{\alpha}}$ a pour limite zéro; car on a, comme précédemment,

$$\Phi(\rho) < (n+\alpha)^{\alpha-1}[(1+\rho)^{\alpha-1} + \rho(1+\rho)^{\alpha-2} + \ldots + \rho^{\alpha-1}]$$

et par suite

$$\frac{\rho^{n+1}\Phi(\rho)}{(\alpha-1)!(1-\rho)^{\alpha}} < \frac{\rho^n(n+\alpha)^{\alpha-1}[(1+\rho)^{\alpha}-1]}{(\alpha-1)!(1-\rho)^{\alpha}};$$

le deuxième membre a pour limite zéro.

Supposons maintenant que le module ρ de $\frac{x}{a}$ soit supérieur à un ou égal à un. Si $\rho \geq 1$, le terme complémentaire augmente au delà de toute limite. En effet, son module est plus grand que

$$\frac{\rho^{n+1}\operatorname{mod}\Phi\left(\frac{x}{a}\right)}{(\alpha-1)!(1+\rho)^{\alpha}}.$$

Or

$$\Phi\left(\frac{x}{a}\right)=(n-\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(n+2)\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}(1+\varepsilon_n);$$

ε_n ayant pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, le module de $\Phi\left(\frac{x}{a}\right)$ augmente donc indéfiniment avec n; par suite $\frac{\rho^{n+1}\operatorname{mod}\Phi\left(\frac{x}{a}\right)}{(\alpha-1)!\,(1-\rho)^{\alpha}}$ augmente aussi indéfiniment avec n : la série (2) est donc divergente quand $\operatorname{mod}\left(\frac{x}{a}\right)>1$.

4. Considérons maintenant la fonction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ où $F(x)$ est un polynôme quelconque

$$F(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-l)^{\lambda};$$

il est bien évident que, si $\frac{1}{F(x)}$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de x, $\frac{f(x)}{F(x)}$ l'est également; si la série de $\frac{1}{F(x)}$ est divergente, celle de $\frac{f(x)}{F(x)}$ l'est aussi.

Je suppose

$$\operatorname{mod}\left(\frac{x}{a}\right)<1,\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{x}{b}\right)<1,\qquad \ldots,\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{x}{l}\right)<1.$$

Développons $\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}$, $\frac{1}{(x-b)^{\beta}}$, ..., $\frac{1}{(x-l)^{\lambda}}$ suivant les puissances ascendantes de x par la formule précédente et soient

$$\frac{1}{(x-a)^{\alpha}} = A_n + A'_n,$$

$$\frac{1}{(x-b)^{\beta}} = B_n - B_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{(x-l)^{\lambda}} = L_n + L'_n,$$

A_n, B_n, ..., L_n étant l'ensemble formé par les $n+1$ premiers termes du développement de chacune des fonctions et A'_n, B'_n, ..., L'_n les termes complémentaires respectifs.

Faisons le produit de ces égalités membre à membre : il viendra

$$\frac{1}{F(x)} = A_n B_n \ldots L_n + \ldots + A'_n B'_n \ldots L'_n.$$

A'_n, B'_n, ..., L'_n renferment en facteur la puissance $n+1$ de $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b} \cdots$, $\frac{x}{l}$; soit $A_n B_n \ldots L_n = f_n(x) + \varphi_n(x)$, $f_n(x)$ étant la fonction entière de degré n renfermée dans le produit $A_n B_n \ldots L_n$ et $\varphi_n(x)$ un polynôme dont tous les termes renferment en facteur des quantités $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b}$, ..., $\frac{x}{l}$ dont le nombre est égal à $n+1$ au moins. On aura

$$\frac{1}{F(x)} = f_n(x) - R_n.$$

Je vais démontrer que R_n a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment. On a

$$R_n = \varphi(x) + A'_n B_n \ldots L_n + \ldots + A'_n B'_n \ldots L'_n.$$

Soit ρ le module de la plus grande des quantités $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{b}$, ...,

$\frac{x}{l}$; ρ est moindre que 1. Chacune des expressions qui figurent dans R_n renferme en facteur un produit de la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{x}{b}\right)^{6_1}\cdots\left(\frac{x}{l}\right)^{\lambda_1}, \qquad \alpha_1 + 6_1 + \ldots + \lambda_1 = n + 1.$$

Le module de R_n est d'ailleurs moindre que la somme des modules des termes qui composent R_n. Considérons d'abord le module de $\varphi_n(x)$. Ce module est moindre que ρ^{n+1} multiplié par p fois la somme des modules des termes qui composent le produit $A_n B_n \ldots L_n$, p étant le nombre des quantités A_n, B_n, ..., L_n; la somme des modules des termes de chacune des quantités A_n, B_n est une quantité finie; leur produit est donc une quantité finie : par suite le module de $\varphi_n(x)$ est de la forme $\rho^{n+1} A$, A étant un nombre fini.

Il en est de même de chacun des termes qui composent R_n. Ils renferment tous en facteur un terme accentué dont le module a pour limite zéro; par suite, comme ces termes sont en nombre fini, la somme de leurs modules a pour limite zéro; le module de R_n a donc aussi pour limite zéro.

La fonction $\frac{1}{F(x)}$ est donc développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de x pour toute valeur de x dont le module est inférieur au module de la plus petite des quantités a, b, ..., l, et $f_n(x)$ représente avec autant d'approximation que l'on veut la fonction $\frac{1}{F(x)}$.