E. GOURSAT

Remarques sur la détermination des foyers d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 465-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__465_1>

REMARQUES SUR LA DÉTERMINATION DES FOYERS D'UNE CONIQUE;

PAR M. E. GOURSAT.

Soit

$$(1) \quad f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

l'équation d'une conique rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires, les coefficients a, b, c, d, e, f étant réels. Les foyers de cette conique sont les points d'intersection des deux courbes

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} X = {} & (b^2 - ac)(x^2 - y^2) + 2(be - cd)x \\ & + 2(ae - bd)y + e^2 - d^2 + f(a - c) = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} Y = {} & 2(b^2 - ac)xy + 2(bd - ae)x \\ & + 2(be - cd)y + 2(bf - de) = 0; \end{aligned} \right.$$

pour trouver les points réels d'intersection de ces deux courbes, on peut procéder comme il suit.

Multiplions l'équation (3) par $i = \sqrt{-1}$, et ajoutons; en posant

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \mathrm{A} &= b^2 - ac, \\ \mathrm{B} &= bc - cd + i(bd - ae), \\ \mathrm{C} &= e^2 - d^2 + f(a - c) + 2i(bf - de), \end{aligned}$$

il vient

$$\mathrm{X} + i\mathrm{Y} = \mathrm{A}z^2 + 2\mathrm{B}z + \mathrm{C} = 0. \tag{4}$$

La recherche des racines de l'équation (4) revient précisément à la recherche des systèmes de solutions réelles communes aux équations (2) et (3) et, inversement, tout point d'intersection réel de ces deux courbes fournit une racine de l'équation (4). Nous sommes conduits, par conséquent, à la conclusion suivante :

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) *les coordonnées des deux foyers réels de la conique représentée par l'équation* (1); *si l'on pose*

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2,$$

les deux quantités imaginaires z_1 *et* z_2 *sont les racines de l'équation* (4).

Supposons d'abord $b^2 - ac$ différent de zéro; en résolvant l'équation (4), on trouve

$$z = \frac{cd - be + i(ae - bd) + \sqrt{\Delta}\sqrt{a - c + 2ib}}{b^2 - ac}, \tag{5}$$

où Δ désigne le discriminant

$$\Delta = acf + 2bde - ae^2 - cd^2 - fb^2.$$

Tout revient donc à extraire la racine carrée de la quantité imaginaire $a - c + 2ib$. Une fois les foyers réels connus, les foyers imaginaires se déterminent sans difficulté.

Si $b^2 - ac$ est nul, on trouve pour la valeur de z correspondant au foyer unique une fonction rationnelle des coordonnées.

Il est à remarquer que la méthode précédente ne diffère pas au fond de la méthode générale employée par Salmon pour résoudre les équations (2) et (3), et qu'elle conduit précisément aux mêmes calculs. Si celle-ci présente quelque avantage, c'est qu'elle ramène immédiatement la question à une question traitée dans tous les cours d'Algèbre, à propos de la racine carrée d'une quantité imaginaire.

Il est aisé d'expliquer le résultat précédent et de l'étendre aux courbes algébriques planes de degré quelconque. Soit

$$\varphi(m, p) = 0 \tag{6}$$

l'équation tangentielle d'une courbe algébrique plane réelle C, dans un système d'axes rectangulaires, c'est-à-dire la condition pour que la droite

$$y = mx + p \tag{7}$$

soit tangente à cette courbe. Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un foyer réel de cette courbe; la droite

$$y = ix + y_1 - ix_1$$

sera tangente à la courbe C et l'on aura, par conséquent,

$$\varphi(i, y_1 - ix_1) = 0;$$

en séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on pourra écrire

$$\varphi(i, y_1 - ix_1) = X + iY.$$

X et Y désignant des fonctions entières à coefficients réels de x_1, y_1. Mais, puisque x_1 et y_1 sont supposés réels, on aura à la fois

$$X = 0, \qquad Y = 0,$$

et les foyers réels seront précisément les points d'intersection réels de ces deux courbes. Or, si l'on pose

$$z = x_1 + iy_1,$$

la relation précédente peut s'écrire

$$\varphi(i, -iz) = X + iY,$$

et la recherche des points réels communs à ces deux courbes revient précisément à résoudre l'équation à coefficients imaginaires

$$\varphi(i, -iz) = 0.$$

Ainsi, *pour avoir l'équation qui détermine les affixes des foyers réels de la courbe* C, *il suffit de remplacer m par i et p par — iz dans l'équation tangentielle* (6) *de cette courbe.*

Pour présenter une application de ce qui précède, considérons toutes les paraboles inscrites dans un triangle. Leur équation tangentielle contiendra un paramètre arbitraire λ au premier degré, et l'équation qui détermine le foyer de l'une de ces paraboles sera de la forme

$$(A\lambda - B)z - C\lambda + D = 0$$

ou

$$z = -\frac{C\lambda + D}{A\lambda + B}.$$

Pour avoir le lieu décrit par ce foyer, il faudra faire varier λ par valeurs réelles de $-\infty$ a $+\infty$, c'est-à-dire faire décrire à λ l'axe des quantites réelles. Mais la formule précédente fait correspondre à une droite une circonférence; on retrouve ainsi le théorème connu.