CH. BIEHLER

Sur une application de la méthode de Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 421-426
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__421_1>

SUR UNE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE STURM;

PAR M. CH. BIEHLER.

La fonction $\tang x$ développée en fraction continue donne, comme l'on sait, le développement suivant

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

Les réduites de cette fraction continue sont des quotients de polynômes entiers en x. Ces polynômes ont tous leurs zéros réels, et la démonstration de cette propriété par la méthode de Sturm donne lieu à une remarque qui offre quelque intérêt.

En formant les réduites successives de la fraction continue, on obtient

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{x}{1},$$
$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3x}{1.3 - x^2},$$
$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{1.3.5x - x^3}{1.3.5 - 6x^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

D'une manière générale, les polynômes P et les polynômes Q sont liés par la loi de récurrence

$$P_n = (2n-1)P_{n-1} - x^2 P_{n-2},$$
$$Q_n = (2n-1)Q_{n-1} - x^2 Q_{n-2}.$$

Ces relations s'appliquent même pour $n = 2$, si l'on fait les conventions

$$P_0 = 0, \qquad Q_0 = 1.$$

Elles permettent de calculer aisément ces polynômes; on a ainsi

$$P_1 = x,$$
$$P_2 = 1.3x,$$
$$P_3 = 1.3.5x - x^3,$$
$$P_4 = 1.3.5.7x - 10x^3,$$
$$P_5 = 1.3.5.7.9x - 105x^3 + x^5,$$
$$P_6 = 1.3.5.7.9.11x - 1260x^3 + 21x^5,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$Q_1 = 1,$$
$$Q_2 = 1.3 - x^2,$$
$$Q_3 = 1.3.5 - 6x^2,$$
$$Q_4 = 1.3.5.7 - 45x^2 + x^4,$$
$$Q_5 = 1.3.5.7.9 - 420x^2 + 15x^4,$$
$$Q_6 = 1.3.5.7.9.11 - 4725x^2 + 210x^4 - x^6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On voit que P_{2n-1} et P_{2n} sont chacun de degré $2n-1$, et que les coefficients de la plus haute puissance de x changent de signe de deux en deux; ces coefficients sont du signe de $(-1)^{n-1}$.

La relation

$$P_n = (2n-1)P_{n-1} - x^2 P_{n-2},$$

appliquée aux polynômes P_{2n}, P_{2n-1}, P_{2n-2}, ..., va nous permettre de démontrer la réalité des racines de l'équation $P_{2n} = 0$ ou de $P_{2n-1} = 0$. On a, en effet,

$$\begin{aligned} P_{2n} &= (4n-1)P_{2n-1} - x^2 P_{2n-2}, \\ P_{2n-1} &= (4n-3)P_{2n-2} - x^2 P_{2n-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_2 &= 3P_1 - x^2 P_0. \end{aligned}$$

Ces relations montrent que deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler pour une même valeur de x, excepté pour $x = 0$, et, si l'une d'elles s'annule, celles qui la comprennent sont de signes contraires.

Si donc on substitue dans la suite

$$P_{2n}, \quad P_{2n-1}, \quad P_{2n-2}, \quad \ldots, \quad P_2, \quad P_1,$$

successivement $-\infty$ et $-\varepsilon$, $+\varepsilon$ et $+\infty$, ε étant aussi voisin que l'on veut de zéro, pour $x = -\infty$, P_{2n} et P_{2n-1} ont le signe de $(-1)^n$; P_{2n-2} et P_{2n-3}, celui de $(-1)^{n-1}$, ...; P_2 et P_1 ont le signe $-$. La suite P_{2n}, P_{2n-1}, ..., P_1 présente donc $n-1$ variations. Pour $x = -\varepsilon$, ε étant suffisamment petit, tous les polynômes ont le signe $-$ et, par suite, ne présentent que des permanences; l'équation $P_{2n} = 0$ a donc $n-1$ racines au moins entre ∞ et $-\varepsilon$.

Pour $x = +\varepsilon$, toutes les fonctions ont le signe $+$; pour $x = +\infty$, elles ont, par groupes de deux, à partir de P_{2n}, les signes de

$$(-1)^{n-1}, \quad (-1)^{n-2}, \quad \ldots, \quad (-1), \quad +1;$$

elles présentent donc $n-1$ variations; l'équation $P_{2n}=0$ a donc aussi au moins $(n-1)$ racines réelles entre $+\varepsilon$ et $+\infty$; ceci résultait d'ailleurs aussi de ce que P_{2n} ne renferme que des puissances de x de même parité. L'équation $P_{2n}=0$ a donc au moins $2(n-1)$ racines réelles autres que zéro; elle admet aussi la racine zéro, et, comme elle n'est que de degré $2n-1$, elle a toutes ses racines réelles.

Le même raisonnement s'applique à l'équation $P_{2n-1}=0$ qui est aussi de degré $2n-1$; il suffit de considérer la suite des fonctions

$$P_{2n-1},\quad P_{2n-2},\quad \ldots,\quad P_2,\quad P_1,$$

qui ne présente plus qu'une seule fonction de degré $2n-1$.

On voit, par ce qui précède, que le rapport $\frac{P_{2n}}{P_{2n-1}}$ passe d'une valeur négative à une valeur positive lorsque x, en croissant, traverse une racine négative de l'équation $P_{2n}=0$, et il passe d'une valeur positive à une valeur négative quand x, en croissant, traverse une racine positive de la même équation.

Cela tient à ce que, entre $-\infty$ et zéro, la suite

$$P_{2n},\quad P_{2n-1},\quad P_{2n-2},\quad \ldots,\quad P_2,\quad P_1$$

perd des variations et en gagne entre zéro et $+\infty$.

Il en sera ainsi chaque fois que des polynômes, tous de degré pair ou tous de degré impair, ne renfermant que des puissances de x de même parité, satisferont à des relations de Sturm.

Soit, pour fixer les idées, la suite des polynômes

$$Q_1,\quad Q_2,\quad \ldots,\quad Q_{2n},$$

qui sont les dénominateurs des réduites considérées.

Ces fonctions sont toutes de degré pair et ne renferment que des puissances paires de la variable.

Q_{2n} est de degré $2n$, Q_{2n-1} n'est que de degré $2n - 2$.

Cherchons les signes des quotients

$$\frac{Q_{2n}(-a-\varepsilon)}{Q_{2n-2}(-a-\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{2n}(a-\varepsilon)}{Q_{2n-2}(a-\varepsilon)},$$

$Q_{2n}(x)$ désignant le polynôme Q_{2n}, $-a$ et $+a$ deux racines de l'équation $Q_{2n}(x) = 0$. On a

$$Q_{2n}(-a-\varepsilon) = -\varepsilon Q'_{2n}(-a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} Q''_{2n}(-a) + \ldots.$$

Pour une valeur de ε suffisamment petite, $Q_{2n}(-a-\varepsilon)$ a le signe de $-\varepsilon Q'_{2n}(-a)$; $Q_{2n}(a+\varepsilon)$ a aussi le signe de $-\varepsilon Q'_{2n}(a)$, et $Q_{2n-2}(-a-\varepsilon)$, $Q_{2n-1}(a-\varepsilon)$ sont de mêmes signes; mais $Q'_{2n}(-a)$ et $Q'_{2n}(a)$ sont évidemment de signes contraires; donc

$$\frac{Q_{2n}(-a-\varepsilon)}{Q_{2n-2}(-a-\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{2n}(a-\varepsilon)}{Q_{2n-2}(a-\varepsilon)}$$

sont de signes contraires. Si donc le rapport $\frac{Q_{2n}(x)}{Q_{2n-2}(x)}$ passe du négatif au positif quand x, en croissant, traverse une racine négative de $Q_{2n}(x) = 0$, il passera du positif au négatif quand x, en croissant, traverse une racine positive de la même équation.

Ces polynômes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2n-1}, Q_{2n}, \ldots$ jouissent de propriétés analogues à celles des polynômes P; les racines des équations $Q_\mu = 0$ sont toutes réelles; on le montre comme on l'a fait pour les équations $P_\mu = 0$.

J'ai fait voir (*même Recueil*, t. XIX, 2e série) que le polynôme U_m, qui est le premier membre de l'équation qui donne tang $\frac{a}{m}$ lorsque tang a est donnée, est le premier terme d'une suite de Sturm qui jouit de propriétés analogues à celles des polynômes précédents;

mais U_m n'a pas, comme les précédents, ses termes tous de degrés pairs ou impairs, et les degrés des polynômes U_m, U_{m-1}, ... ne décroissent que d'une unité quand on passe de l'un d'eux au suivant.

La démonstration précédente fait voir aussi que les racines des équations $P_\mu = 0$, $Q_\mu = 0$ sont distinctes.