N. GOFFART

Solution analytique de la question proposée en 1884 pour l'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 395-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__395_1>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE EN 1884 POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PAR M. N. GOFFART.

On donne une conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. *On joint un point* M *de cette conique aux foyers* F *et* F'.

1° *On demande d'exprimer les coordonnées du centre du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle* FMF' *au moyen des coordonnées de* M.

2° *Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que, si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points* M *et* M' *de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu de la corde* MM';

3° *Pour chaque position du point* M, *le rayon vecteur* FM *touche le cercle correspondant en un point* P; *on déterminera en coordonnées polaires l'équation du* *lieu décrit par le point* P. *On prendra le foyer* F *pour origine des rayons et* OX *pour origine des angles.*

Nota. — *Dans toutes ces questions, il est nécessaire de distinguer les cas où la conique est une ellipse et celui où elle est une hyperbole.*

1° En désignant par F et F′ les deux foyers, F′ étant celui qui est sur la partie positive de l'axe des x, on sait qu'on a

$$\mathrm{FM} = a + \frac{cx}{a}, \qquad \mathrm{F'M} = \pm\left(a - \frac{cx}{a}\right),$$

le signe + appartenant à l'ellipse, le signe — à l'hyperbole (branche F′). Par suite, si p désigne le demi-périmètre du triangle FMF′, on a

$$\text{Dans l'ellipse :} \qquad p = a + c.$$

$$\text{Dans l'hyperbole :} \quad p = \frac{cx}{a} + c.$$

Désignons maintenant par C le centre du cercle inscrit, par C_M, C_F, $C_{F'}$ les centres des cercles exinscrits; les coordonnées de ces centres seront désignées par X, Y munis des indices correspondants.

Ces quatre centres se classent ainsi :

C et C_M sont sur la normale dans l'ellipse, et sur la tangente dans l'hyperbole; C_F et $C_{F'}$ sont au contraire sur la tangente dans l'ellipse et sur la normale dans l'hyperbole.

On a ensuite

$$c + X = p - \mathrm{MF'}, \qquad c + X_M = p - \mathrm{MF'},$$
$$c + X_F = p, \qquad c - X_{F'} = p,$$
$$cy = pY = -(p - \mathrm{FF'})Y_M = (p - \mathrm{MF'})Y_F = (p - \mathrm{MF})Y_{F'} :$$

substituant dans ces relations les valeurs de p, FF′, MF, MF′, il vient, dans l'ellipse,

$$X = \frac{cx}{a}, \qquad Y = \frac{cy}{a+c},$$

$$X_M = -\frac{cx}{a}, \qquad Y_M = -\frac{cy}{a-c},$$

$$X_F = a, \qquad Y_F = \frac{ay}{a+x},$$

$$X_{F'} = -a, \qquad Y_{F'} = \frac{ay}{a-x},$$

et, pour l'hyperbole,

$$X = a, \qquad Y = \frac{ay}{a+x},$$

$$X_M = -a, \qquad Y_M = -\frac{ay}{x-a},$$

$$X_F = \frac{cx}{a}, \qquad Y_M = \frac{cy}{c+a},$$

$$X_{F'} = -\frac{cx}{a}, \qquad Y_{F'} = \frac{cy}{c-a},$$

Les expressions X et Y répondent à la première partie de l'énoncé. Mais on voit que X_M et Y_M jouent un rôle à peu près analogue. Enfin les cercles C et C_M dans l'ellipse sont représentés par les cercles C_F et $C_{F'}$ dans l'hyperbole. Les lieux des centres C et C_M dans l'ellipse (ou de C_F et $C_{F'}$ dans l'hyperbole) sont respectivement

$$\frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{c^2}\,\frac{a+c}{a-c} = 1, \qquad \frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{c^2}\,\frac{a-c}{a+c} = 1,$$

qui sont des ellipses relativement à l'ellipse, ou des hyperboles relativement à l'hyperbole.

Les lieux de C_F et $C_{F'}$ dans l'ellipse (ou de C et C_M dans l'hyperbole) sont les tangentes aux sommets A et A′ des coniques.

2° Si, par rapport à deux points M et M′, on considère dans l'ellipse les cercles C et C_M, ou dans l'hyperbole les cercles C_F et $C_{F'}$, ils donnent lieu à la deuxième partie de l'énoncé. L'équation concernant le cercle C est, par exemple,

$$\left(\eta - \frac{c}{a+c}y\right)^2 + \left(\xi - \frac{c}{a}x\right)^2 = \frac{c^2y^2}{(a+c)^2}.$$

En en retranchant une équation semblable pour le point $M'(x', y')$, on aura l'équation de l'axe radical

$$\left(\eta - \frac{c}{a+c}\,\frac{y+y'}{2}\right)\frac{c}{a+c}(y-y')$$
$$+ \left(\xi - \frac{c}{a}\,\frac{x+x'}{2}\right)\frac{c}{a}(x-x') = \left(\frac{c}{a+c}\right)^2 \frac{y'^2-y^2}{2}.$$

D'après l'équation de l'ellipse $\dfrac{x^2-x'^2}{a^2} = \dfrac{y'^2-y^2}{a^2-c^2}$, en tenant compte de cette relation, et faisant dans l'équation de l'axe radical

$$\eta = \frac{y+y'}{2}, \qquad \xi = \frac{x+x'}{2},$$

elle devient

$$\frac{y^2-y'^2}{2}\left(\frac{c}{a+c} - \frac{c}{a+c}\right) = 0.$$

Elle est donc satisfaite par les coordonnées du milieu de la corde MM'.

Ces propriétés n'ont pas lieu pour les autres cercles.

3° D'après ce qu'on a dit, on a

$$\text{FP} = c + \text{X} = c + \frac{cx}{a} \text{ dans l'ellipse,}$$
$$= a + c \text{ dans l'hyperbole;}$$

donc, dans ce dernier cas, le lieu de P est le cercle de centre F et de rayon $a+c$. Pour l'ellipse

$$\rho = c + \frac{cx}{a}; \qquad c + x = \text{MF}\cos\omega = \left(a + \frac{cx}{a}\right)\cos\omega;$$

éliminant x, il reste, pour l'équation du lieu de P,

$$\rho = \frac{c(a-c)(1-\cos\varphi)}{a-c\cos\varphi};$$

si l'on remarque que

$$\text{FM} - \text{FP} = \left(a + \frac{cx}{a}\right) - \left(c + \frac{cx}{a}\right) = a - c,$$

on voit que cette courbe est une *conchoïde* de l'ellipse par rapport au foyer F : elle est fermée.

En prenant le cercle c_{M}, on obtiendrait un cercle dans l'ellipse et une conchoïde (à branches infinies) de l'hyperbole, dans l'hyperbole.

Enfin, si l'on prend les autres cercles, on aura des relations analogues aux précédentes ; par exemple, des cercles de rayon $a+c$ et $a-c$ pour les lieux des points de contact de FM avec C_{F} et $\text{C}_{\text{F}'}$.