NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur une distribution de zéros

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 36-43

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__36_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR UNE DISTRIBUTION DE ZÉROS;

PAR M. E. CESARO.

Soient $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ les zéros de la fonction u, arbitrairement distribués dans le plan. Nous voulons étudier la distribution des zéros de $u'^2 - uu''$. Si les zéros de u sont simples, il est clair qu'il n'y en a pas qui appartiennent à $u'^2 - uu''$, et, par suite, l'équation à résoudre prend la forme

$$(1) \qquad \frac{1}{(z-c_1)^2} + \frac{1}{(z-c_2)^2} + \frac{1}{(z-c_3)^2} + \ldots + \frac{1}{(z-c_n)^2} = 0.$$

Cela étant, posons

$$c_r = a_r + ib_r, \qquad z = x + iy;$$

x et y sont les coordonnées d'un zéro quelconque Q de $u'^2 - uu''$. L'équation (1) se dédouble en

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(x-a_r)^2}{\delta_r^4} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(y-b_r)^2}{\delta_r^4},$$

$$(3) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(x-a_r)(y-b_r)}{\delta_r^4} = 0,$$

δ_r étant la distance Qc_r. Si l'on charge les zéros de u en raison inverse de la quatrième puissance de leurs distances à Q, l'équation (3) montre que les parallèles aux axes, menées par Q, forment un couple d'axes d'inertie, principaux pour ce point. Mais, d'autre part, d'après l'équation (2), les moments d'inertie, relatifs à ces axes, sont égaux entre eux. Il en résulte que toute droite passant par Q est un axe principal pour ce point. Autrement dit : *le moment d'inertie d'un système de masses, appliquées aux zéros de u avec une intensité inversement proportionnelle à la quatrième puissance de leurs distances à un zéro de* $u'^2 - uu''$, *a une valeur constante relativement à tout axe passant par ce point.* Il est évident, d'ailleurs, que cette valeur constante n'est autre que la demi-somme des inverses des carrés des distances de Q aux zéros de u. Si l'on représente par ρ le rayon de giration, on a donc

$$(4) \qquad 2\rho^2 = \frac{\dfrac{1}{\delta_1^2} + \dfrac{1}{\delta_2^2} + \dfrac{1}{\delta_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{\delta_n^2}}{\dfrac{1}{\delta_1^4} + \dfrac{1}{\delta_2^4} + \dfrac{1}{\delta_3^4} + \ldots + \dfrac{1}{\delta_n^4}}.$$

Si les zéros de u sont alignés sur une droite D, celle-ci contient nécessairement le barycentre G du système de masses : elle est, en outre, pour ce point, un axe principal, par rapport auquel le moment d'inertie est *nul*. On sait que l'autre axe, perpendiculaire à D, doit passer par Q, et le rayon de giration correspondant, représenté par la distance QG, est, d'autre part, égal à ρ, comme pour tout axe issu de Q. Conséquemment, *si, aux zéros de u, alignés sur une droite* D, *on applique des masses inversement proportionnelles aux quatrièmes puissances de leurs distances à un zéro* Q, *de $u'^2 - uu''$, le barycentre du système n'est autre que la projection de* Q *sur* D. En outre, *la distance de* Q *à* D *représente le rayon de giration du système, relativement à tout axe passant par* Q. La théorie des moments d'inertie permet enfin d'ajouter que, plus généralement, *le rayon de giration du système de masses, relativement à une droite quelconque du plan, est la distance de* G *à la projection de* Q *sur la droite considérée.*

D'après ce qui précède, on voit que *les zéros de $u'^2 - uu''$ sont toujours situés en dehors de la droite* D; car le rayon de giration ρ ne saurait être nul. En outre, il est clair que le symétrique Q' de Q, par rapport à D, satisfait aux mêmes conditions que Q, puisque le système de masses, relatif à Q', est identique avec celui qui se rapporte à Q. *Les $2n - 2$ zéros de $u'^2 - uu''$ sont* donc *symétriquement distribués de part et d'autre de la droite* D. Remarquons enfin que le maximum de l'expression (4) a lieu lorsque les quantités δ sont toutes égales à leur maximum d; d'où il suit que l'on a $2\rho^2 < d^2$. On déduit de là que *la distance ρ est certainement inférieure à l'intervalle qui sépare les zéros extrêmes*. Lorsque $n = 2$, on a

$$2\rho^2 = d^2,$$

et les zéros des deux fonctions sont les sommets d'un carré. En particulier, si l'on applique ce qui précède au cas où l'équation $u = 0$ n'a que des racines réelles, on voit que les racines de $u'^2 - uu'' = 0$ sont imaginaires, et que, dans chacune d'elles, le coefficient de i est, en valeur absolue, inférieur à l'excès de la plus grande sur la plus petite des racines de u.

Considérons, plus généralement, l'équation

$$u^2 + K^2(u'^2 - uu'') = 0,$$

K étant l'affixe d'un point quelconque du plan. Soit $K = Re^{i\theta}$. Si l'on pose

$$A = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(x-a_r)^2}{\delta_r^4},$$

$$B = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(y-b_r)^2}{\delta_r^4},$$

$$C = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(x-a_r)(y-b_r)}{\delta_r^4},$$

l'équation proposée se dédouble en

$$A - B = \frac{\cos 2\theta}{R^2}, \qquad 2C = \frac{\sin 2\theta}{R^2},$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{2C}{A-B}.$$

Cette relation montre que *la parallèle à* OK, *passant par* Q, *est, pour ce point, un axe principal d'inertie*. Supposons, maintenant, que les zéros de u soient sur une droite D, parallèle ou perpendiculaire à OK. D'après ce que l'on vient de dire, les axes principaux, de centre Q, sont parallèles à D et à ses perpendiculaires, c'est-à-dire aux axes principaux de centre G. Or on sait que cela ne peut arriver, à moins que Q ne se trouve sur un de ces derniers axes. Donc, comme précédemment, *le barycentre du système de masses est la projection de* Q *sur* D, pourvu, nous le répétons, que le point K se trouve sur la parallèle ou sur la perpendiculaire à D, issues de l'origine. Mais le zéro Q ne coïncide plus, comme dans le cas précédent, avec un des points P, P′, pour lesquels l'ellipse d'inertie se réduit à un cercle. Il y a, cependant, une liaison remarquable entre tous ces points. Observons d'abord que, si l'on décrit la circonférence sur le diamètre QP, les axes principaux, de centre Q, passent par les extrémités du diamètre qui contient G. D'après cette construction, si l'on observe que G est le milieu de PP′, on démontre sans peine que *les axes principaux d'inertie, relatifs au point* Q, *sont les tangentes communes à deux paraboles ayant pour foyers* P, P′, *et pour directrices* QP′, QP, *respectivement.*

Voici comment nous avons été conduit à nous occuper de ces questions. On sait que M. d'Ocagne a étudié l'équation symbolique

$$u^\nu - (u - v)^\nu = 0, \tag{5}$$

où

$$v_r = \frac{1}{r}\,\frac{d^\nu u^r}{dz^\nu},$$

en démontrant que, si ν est *pair,* l'équation dont il s'agit n'a que des racines imaginaires, lorsque l'équation $u = 0$ a toutes ses racines réelles et simples. Il est possible de ramener cette proposition à un degré extrême d'évidence, grâce à une remarquable formule, qui permet d'exprimer la $\nu^{\text{ième}}$ dérivée de $\log u$, moyennant les ν^{iemes} dérivées des puissances successives de u. Cette formule est

$$\frac{d^\nu \log u}{dz^\nu} = \sum_{r=1}^{r=\nu} \frac{(-1)^{r-1} C_{\nu,r}}{r u^r}\,\frac{d^\nu u^r}{dz^\nu};$$

u représente une fonction quelconque de z. L'équation (5) devient donc

$$u^\nu \frac{d^\nu \log u}{dz^\nu} = 0,$$

ou bien, dans le cas actuel,

$$(6)\quad \begin{cases} (z-c_1)^\nu(z-c_2)^\nu\ldots(z-c_n)^\nu \\ \times\left[\dfrac{1}{(z-c_1)^\nu}+\dfrac{1}{(z-c_2)^\nu}+\ldots+\dfrac{1}{(z-c_n)^\nu}\right]=0. \end{cases}$$

Lorsque les nombres c sont réels, il est évidemment impossible de satisfaire à cette équation avec des valeurs réelles de z, si ν est *pair*.

Supposons, plus généralement, que les zéros c soient situés sur une droite D et, pour abréger, désignons par U_ν le premier membre de (6). Soient θ_r l'angle de Qc_r avec D, et δ_r la distance Qc_r. On ramène aisément l'équation (6) au couple d'égalités

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\cos\nu\theta_r}{\delta_r^\nu}=0,\qquad \sum_{r=1}^{r=n}\frac{\sin\nu\theta_r}{\delta_r^\nu}=0.$$

Remarquons que le symétrique de Q, par rapport à D, remplit les dernières conditions aussi bien que Q. *Le système des zéros de* U_ν *admet* donc *la droite* D *pour axe de symétrie.* La seconde égalité ne s'oppose pas à ce que tous les angles θ soient nuls; mais la première devient

$$(7)\quad \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^\nu}+\frac{1}{(\lambda-\lambda_2)^\nu}+\frac{1}{(\lambda-\lambda_3)^\nu}+\ldots+\frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^\nu}=0,$$

λ_r et λ étant les abscisses, sur D, des points c_r et Q, par rapport à une origine arbitraire. Si ν est *pair,* il est impossible de satisfaire à (7), et, par suite, *les zéros de* U_ν *ne sont pas situés sur* D. On peut ajouter qu'il y a $(n-1)\frac{\nu}{2}$ de ces zéros situés du même côté de D, et que les autres sont les symétriques des premiers, par rapport à cette droite. Le cas de $\nu=2$ est celui que nous avons étudié au commencement de cette Note. Supposons, maintenant, que ν soit *impair*. On sait démontrer qu'il y a $n-1$ valeurs réelles de λ, vérifiant (7), et que chacune d'elles est isolée entre deux termes consécutifs de la série $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Donc, *si la fonction u a ses n zéros sur une droite D, $n-1$ zéros de U_ν se succèdent sur la même droite, suivant la loi de Rolle, si ν est impair. Les autres zéros constituent $(n-1)\frac{\nu-1}{2}$ couples de points symétriques par rapport à* D. Le cas de $\nu=1$ est fort connu; car $U_1 = u'$. Pour $\nu = 3$, et D coïncidant avec Ox, on voit que, si l'équation $u=0$ a ses n racines réelles, l'équation $2u'^3 - 3uu'u'' + u^2u''' = 0$ a $n-1$ racines réelles et $n-1$ couples de racines imaginaires, etc.

Reprenons l'équation (7) en y supposant toujours ν impair, et tâchons de limiter la racine réelle de U_ν, comprise entre λ_r et λ_{r+1}. On trouve aisément, par un moyen connu,

$$r^{-\frac{1}{\nu}} < \frac{\lambda_{r+1}-\lambda}{\lambda-\lambda_r} < (n-r)^{\frac{1}{\nu}};$$

d'où, après avoir remplacé r par sa plus grande valeur $n-1$,

$$\lambda_r + \frac{\lambda_{r+1}-\lambda_r}{1+(n-1)^{\frac{1}{\nu}}} < \lambda < \lambda_{r+1} - \frac{\lambda_{r+1}-\lambda_r}{1+(n-1)^{\frac{1}{\nu}}}. \tag{8}$$

A plus forte raison

$$\lambda_r + \frac{\lambda_{r+1}-\lambda_r}{n} < \lambda < \lambda_{r+1} - \frac{\lambda_{r+1}-\lambda_r}{n}.$$

Donc, *si l'on partage en n segments égaux l'intervalle compris entre deux racines consécutives de u, on peut affirmer que U_ν ne s'annule pas dans les segments extrêmes*. Du reste, si $\nu > 1$, on peut déduire des inégalités (8) des limitations plus approchées. Par exemple, *si l'on partage en n segments égaux l'intervalle compris entre deux racines consécutives de u, la fonction* U_ν

ne peut s'annuler que dans les $n-2s$ segments moyens, dès que n cesse d'être inférieur à $\frac{s}{2}\left(3+\sqrt{4s-3}\right)$.

Ainsi, l'équation $u=0$, de degré $n>45$, n'ayant que des racines réelles et simples, si l'on partage en n segments égaux l'intervalle compris entre deux racines consécutives quelconques, la racine réelle de U_ν (ν *impair*), qui se trouve dans l'intervalle considéré, est nécessairement contenue par les $n-20$ segments du milieu. Cette limitation peut être précisée davantage à mesure que ν croît. C'est ainsi que, dans le dernier énoncé, on peut remplacer $n-20$ par $n-44$ dès que ν surpasse 43. Remarquons, pour finir, que, *lorsque* ν *croît indéfiniment, les zéros de* U_ν, *situés dans les intervalles compris entre les zéros successifs de* u, *tendent vers les points milieux de ces intervalles.*