Nouvelles annales de mathématiques

P. Appell

Sur les polynômes qui expriment la somme des puissances p^{imes} des n premiers nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 312-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__312_0>

SUR LES POLYNOMES QUI EXPRIMENT LA SOMME DES PUISSANCES $p^{\text{ièmes}}$ DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. P. APPELL,
professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Nous commencerons par résoudre un problème d'Algèbre auquel se rattache bien simplement, comme nous le montrerons, la détermination de la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres entiers.

1. *Former un polynôme en x, $\varphi_p(x)$, qui s'annule pour $x = 0$ et qui vérifie l'identité*

$$\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1) = x^p, \tag{1}$$

p désignant un entier positif ou nul.

Tout d'abord ce polynôme $\varphi_p(x)$ est nécessairement du degré $p+1$; car, en supposant $\varphi_p(x)$ de degré k, on obtient, pour la différence

$$\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1),$$

un polynôme de degré $k-1$, et, comme cette différence doit être x^p, c'est-à-dire être de degré p, on doit avoir $k-1=p$, $k=p+1$. Posons donc

$$\varphi_p(x) = A_0 x^{p+1} + A_1 x^p + A_2 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x^2 + A_p x,$$

sans mettre de terme constant, puisque le polynôme doit s'annuler avec x. Nous aurons

$$\begin{aligned}
\varphi_p(x-1) = A_0 x^{p+1} &+ \left[A_1 - \frac{p+1}{1} A_0\right] x^p \\
&+ \left[A_2 - \frac{p}{1} A_1 + \frac{(p-1)p}{1.2} A_0\right] x^{p-1} \\
&+ \left[A_3 - \frac{p-1}{1} A_2 + \frac{p(p-1)}{1.2} A_1 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} A_0\right] x^{p-2} + \ldots \\
&+ [A_p - 2A_{p-1} + 3A_{p-2} - \ldots + (-1)^p (p+1) A_0]\, x \\
&\qquad - A_p + A_{p-1} - A_{p-2} + \ldots + (-1)^{p+1} A_0.
\end{aligned}$$

Pour écrire que la différence $\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1)$ est identique à x^p, il faudra égaler à 1 le coefficient de x^p dans cette différence et à 0 tous les autres coefficients : on a ainsi les équations

$$\begin{aligned}
(p+1) A_0 &= 1, \\
\frac{p}{1} A_1 - \frac{(p+1)p}{1.2} A_0 &= 0, \\
\frac{p-1}{1} A_2 - \frac{p(p-1)}{1.2} A_1 + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} A_0 &= 0, \\
2A_{p-1} - 3A_{p-2} + 4A_{p-3} + \ldots - (-1)^p (p+1) A_0 &= 0, \\
A_p - A_{p-1} + A_{p-2} + \ldots + (-1)^p A_0 &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,
\end{aligned}$$

qui déterminent tous les coefficients de proche en proche. La première de ces équations donne

$$A_0 = \frac{1}{p+1},$$

la seconde donne ensuite $A_1 = \frac{1}{2}$, la troisième $A_2 = \frac{p}{12}$ et ainsi de suite, la dernière A_p.

Le polynôme cherché $\varphi_p(x)$ vérifiant l'identité (1) et s'annulant avec x est ainsi complètement déterminé.

On trouve sans peine, en faisant successivement $p = 0, 1, 2, 3$,

$$\varphi_0(x) = x,$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2 + x}{2} = \frac{x(x+1)}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(x+1)^2}{4}.$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Bernoulli.*

2. *La valeur que prend le polynôme $\varphi_p(x)$ pour une valeur entière positive n attribuée à x est égale à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers.*

En effet, si, dans l'identité (1), nous faisons successivement $x = 1, 2, 3, \ldots n$, nous obtenons les relations

$$\begin{aligned}
\varphi_p(1) - \varphi_p(0) &= 1^p,\\
\varphi_p(2) - \varphi_p(1) &= 2^p,\\
\varphi_p(3) - \varphi_p(2) &= 3^p,\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
\varphi_p(n) - \varphi_p(n-1) &= n^p,
\end{aligned}$$

qui, ajoutées membre à membre, donnent

$$\varphi_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

puisque $\varphi_p(0) = 0$.

Par exemple, la somme des carrés des n premiers nombres entiers est

$$\varphi_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. De l'identité

$$(1) \qquad \varphi_p(x) - \varphi_p(x-1) = x^p$$

se déduisent immédiatement quelques autres propriétés des polynômes $\varphi_p(x)$. D'abord, en supposant l'entier p plus grand que zéro et faisant $x = 0$, on a

$$\varphi_p(-1) = 0;$$

donc *tous les polynômes* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., *s'annulent pour* $x = -1$.

Changeons ensuite, dans l'identité (1), x en $-x$, nous aurons

$$\varphi_p(-x) - \varphi_p(-x-1) = (-1)^p x^p,$$

ou

$$\psi_p(x) - \psi_p(x-1) = x^p \tag{2}$$

en posant

$$\psi_p(x) = (-1)^{p+1}\varphi_p(-x-1),$$

La fonction $\psi_p(x)$ est un polynôme de degré $(p+1)$ en x s'annulant pour $x = 0$, car

$$\psi_p(0) = (-1)^{p+1}\varphi_p(-1) = 0;$$

cette fonction $\psi_p(x)$ vérifie en outre l'identité (2) qui est la même que l'identité (1). Donc le polynôme $\psi_p(x)$ possède les propriétés caractéristiques du polynôme $\varphi_p(x)$; d'où il suit que ces deux polynômes sont identiques, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi_p(x) = (-1)^{p+1}\varphi_p(-x-1), \tag{3}$$

p étant supérieur à 0. Il sera facile de vérifier cette relation (3) sur les polynômes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ dont nous avons donné précédemment les expressions.

L'équation (3) conduit au théorème suivant :

Si l'on fait $x = y - \frac{1}{2}$, *le polynôme* $\varphi_p(x)$ *contient uniquement des puissances paires de* y, *si* p *est impair, et des puissances impaires de* y, *si* p *est pair.*

En effet, la substitution $x = y - \frac{1}{2}$ transforme la relation (3) en celle-ci :

$$\varphi_p(y-\tfrac{1}{2}) = (-1)^{p+1}\varphi_p(-y-\tfrac{1}{2});$$

le polynôme $\varphi_p(y-\frac{1}{2})$ change donc de signe avec y si p est pair, et ne change pas quand y change de signe si p est impair, ce qui démontre le théorème.

Par exemple,

$$\varphi_1(y-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(y^2-\tfrac{1}{4}),$$
$$\varphi_2(y-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{6}y(y^2-\tfrac{1}{4}).$$

Il résulte de là que, si l'entier p est pair et différent de zéro, le polynôme $\varphi_p(y-\frac{1}{2})$ s'annule pour $y=0$, c'est-à-dire que le polynôme $\varphi_p(x)$ s'annule pour $x=-\frac{1}{2}$, proposition qui se vérifie immédiatement par le polynôme $\varphi_2(x)$.

4. Prenons les dérivées des deux membres de l'identité (1) : nous aurons

$$\varphi'_p(x) - \varphi'_p(x-1) = px^{p-1}; \tag{4}$$

si l'on change, dans cette relation, p en $p+1$ et si l'on pose

$$\varpi_p(x) = \frac{1}{p+1}[\varphi'_{p+1}(x) - \varphi'_{p+1}(0)],$$

on voit que le polynôme $\varpi_p(x)$ est du degré $(p+1)$, s'annule avec x et vérifie l'identité

$$\varpi_p(x) - \varpi_p(x-1) = x^p,$$

identique à l'identité (1). Donc le polynôme $\varpi_p(x)$ est identique au polynôme $\varphi_p(x)$, et l'on a

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{p+1}[\varphi'_{p+1}(x) - \varphi'_{p+1}(0)],$$

ou encore

$$\varphi'_{p+1}(x) = \varphi'_{p+1}(0) + (p+1)\varphi_p(x). \tag{5}$$

Cette relation (5) permet de calculer les polynômes $\varphi_p(x)$ de proche en proche. Elle donne, en effet, par l'intégration entre les limites o et x,

$$\varphi_{p+1}(x) = x\varphi'_{p+1}(0) + (p+1)\int_0^x \varphi_p(x)\,dx;$$

pour éliminer la constante inconnue $\varphi'_{p+1}(0)$, faisons $x = -1$; alors $\varphi_{p+1}(x)$ s'annule et l'on obtient

$$\varphi'_{p+1}(0) = (p+1)\int_0^{-1} \varphi_p(x)\,dx,$$

donc enfin

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_{p+1}(x) = (p+1)\,x\int_0^{-1} \varphi_p(x)\,dx \\ + (p+1)\int_0^x \varphi_p(x)\,dx; \end{aligned}\right.$$

relation qui permet de former $\varphi_{p+1}(x)$ quand on connaît $\varphi_p(x)$.

Ainsi, en partant de $p = 0$, $\varphi_0(x) = x$, on a

$$\varphi_1(x) = x\int_0^{-1} x\,dx + \int_0^x x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= 2x\int_0^{-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)dx + 2\int_0^x \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= \frac{x}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

5. Étant donné un polynôme $P(x)$ de degré $p+1$, on peut se proposer de mettre ce polynôme sous la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} P(x) = \lambda_0 + \lambda_1\varphi_0(x) + \lambda_2\varphi_1(x) \\ + \lambda_3\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_{p+1}\varphi_p(x), \end{aligned}\right.$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ désignant des constantes convenables: en d'autres termes, on peut se proposer d'ordonner ce polynôme suivant la série des polynômes $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ...

En admettant que le polynôme $P(x)$ puisse se mettre sous la forme (7), il est aisé de trouver les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$. D'abord, en faisant $x=0$, on trouve $\lambda_0 = P(0)$; puis, en formant la différence $P(x) - P(x-1)$, on a, d'après la propriété fondamentale des polynômes $\varphi_p(x)$,

$$(8)\quad P(x) - P(x-1) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots + \lambda_{p+1} x^p;$$

la formule de Taylor donne

$$P(x) = P(0) + \frac{x}{1} P'(0) + \frac{x^2}{1.2} P''(0) + \ldots + \frac{x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} P^{(p+1)}(0),$$

$$P(x-1) = P(-1) + \frac{x}{1} P'(-1) + \frac{x^2}{1.2} P''(-1) + \ldots + \frac{x^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} P^{(p+1)}(-1);$$

on a donc, en identifiant les deux membres de la relation (8),

$$\lambda_1 = P(0) - P(-1),$$
$$\lambda_2 = P'(0) - P'(-1),$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{1.2}[P''(0) - P''(-1)],$$
$$\lambda_{p+1} = \frac{1}{1.2\ldots p}[P^{(p)}(0) - P^{(p)}(-1)].$$

Telles sont donc les valeurs des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$. Il est maintenant facile de vérifier que, si l'on donne à ces coefficients les valeurs que nous venons de trouver, le polynôme ainsi obtenu

$$\begin{aligned} Q(x) = P(0) &+ [P(0) - P(-1)]\varphi_0(x) \\ &+ [P'(0) - P'(-1)]\varphi_1(x) \\ &+ \frac{1}{1.2}[P''(0) - P''(-1)]\varphi_2(x) + \ldots \\ &+ \frac{1}{1.2\ldots p}[P^{(p)}(0) - P^{(p)}(-1)]\varphi_p(x) \end{aligned}$$

est bien identique au polynôme donné $P(x)$. Il suffit pour cela de remarquer que, d'après la détermination même des coefficients, on a identiquement

$$P(x) - P(x-1) = Q(x) - Q(x-1)$$

ou

$$P(x) - Q(x) = P(x-1) - Q(x-1).$$

La différence $P(x) - Q(x)$ est donc un polynôme qui s'annule pour $x = 0$ et qui ne change pas quand on change x en $x - 1$: cette différence est donc nulle identiquement.

Par exemple, si l'on fait successivement

$$P(x) = (x+1)^{p+1} \qquad \text{et} \qquad P(x) = x^{p+1},$$

on trouve les deux développements suivants

$$(x+1)^{p+1} = 1 + \varphi_0(x) + \frac{p+1}{1}\varphi_1(x) + \frac{(p+1)p}{1.2}\varphi_2(x) + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\varphi_3(x) + \ldots + \frac{p+1}{1}\varphi_p(x),$$

$$x^{p+1} = (-1)^p \left[\varphi_0(x) - \frac{p+1}{1}\varphi_1(x) + \frac{(p+1)p}{1.2}\varphi_2(x) + \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\varphi_3(x) + \ldots + (-1)^p \frac{p+1}{1}\varphi_p(x)\right].$$

6. Pour ne pas être trop long, nous nous bornerons à énoncer les résultats suivants, en laissant aux lecteurs le soin de les démontrer :

1° *Le développement de la fonction*

$$F(h) = \frac{e^{h(x+1)} - 1}{e^h - 1},$$

en série ordonnée suivant les puissances croissantes de h, est

$$1 + \varphi_0(x) + \frac{h}{1}\varphi_1(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi_2(x) + \ldots + \frac{h^p}{1.2\ldots p}\varphi_p(1) + \ldots.$$

On montrera sans peine que le coefficient de $\frac{h^p}{1.2\ldots p}$, dans le développement de $F(h)$ est un polynôme en x s'annulant avec x et vérifiant l'identité (1).

2° *La constante* $\varphi'_p(0)$ *est nulle quand* p *est pair et supérieur à* 2.

3° *Les polynômes*

$$f_p(x) = \varphi_p(x) - \frac{1}{p}\varphi'_p(0)$$

[qui ne diffèrent des polynômes $\varphi_p(x)$ que par une constante] *possèdent la propriété suivante :*

$$\frac{df_p(x)}{dx} = p f_{p-1}(x).$$

Ces polynômes $f_p(x)$ *forment, à une fonction numérique près, les coefficients des puissances de* h *dans le développement en série de* $\frac{he^{h(x+1)}}{e^h - 1}$.

4° *La fonction* $\frac{1}{z-x}$, *dans laquelle* z *désigne une quantité quelconque réelle ou imaginaire et* x *un entier positif ou négatif inférieur en valeur absolue à celui des modules de* z *et de* $z+1$ *qui est le plus petit, peut être représentée par la série*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} &+ \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\varphi_0(x)\\ &+ \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+1)^2}\right]\varphi_1(x)\\ &+ \left[\frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z+1)^3}\right]\varphi_2(x) + \ldots.\end{aligned}$$

Cette série est-elle convergente pour d'autres valeurs de x?

Il serait intéressant de déterminer d'une manière générale le reste de la série précédente, car le théorème de Cauchy permet de rattacher au développement de $\frac{1}{z-x}$ celui d'une fonction analytique quelconque $f(x)$. Mais cette étude nous entraînerait hors du domaine élémentaire sur lequel nous nous sommes placés.

Nous renverrons le lecteur désireux d'approfondir la théorie des polynômes $\varphi_p(x)$ à un Mémoire de Raale publié dans le Tome 42 du *Journal de Crelle*, à un Mémoire de M. Hermite publié dans le Tome 79 du même journal, au *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, et enfin au livre de M. Tannery *Sur la théorie des fonctions*, p. 150.