H. LAURENT

Remarques sur les conditions d'intégrabilité

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 274-279

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__274_1>

REMARQUES SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ;

PAR M. H. LAURENT.

Dans les Traités classiques, on dit généralement que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$(1) \qquad p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n$$

soit une différentielle exacte sont que l'on ait identiquement

$$(2) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$$

pour toutes les valeurs des indices i et j, telles que $i \leqq n$, $j \leqq n$. Cela est vrai, mais l'expression (1) est aussi une différentielle exacte quand l'équation (2) est identiquement vérifiée pour $i = 1$, puis pour $i = 2$ non plus identiquement, mais seulement pour $x_1 = x_1^0$, quels que soient $x_2, x_3, \ldots, x_n$, puis pour $i = 3$, mais seulement pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ quels que soient $x_3, x_4, \ldots, x_n$, etc. C'est ce que j'ai démontré dans un travail qui a paru l'an dernier dans les *Nouvelles Annales*.

Ce fait peut être généralisé et étendu au cas où les conditions d'intégrabilité affectent d'autres formes, et, si l'attention des géomètres s'était portée plus tôt sur ces points importants, Lagrange, Charpit, Pfaff et Jacobi seraient tous parvenus à la méthode de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Dans le travail que je viens de citer, j'ai montré comment Lagrange et Charpit auraient pu découvrir la méthode de Cauchy; je montrerai ici comment la méthode de Jacobi peut y conduire également. Je vais commencer par modifier dans le sens que j'ai indiqué les diverses formes des conditions d'intégrabilité.

Considérons d'abord les équations aux différentielles totales suivantes où X_{ij} est fonction des u et des x :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} du_1 &= X_{11}\, dx_1 + X_{12}\, dx_2 + \ldots + X_{1n}\, dx_n, \\ du_2 &= X_{21}\, dx_1 + X_{22}\, dx_2 + \ldots + X_{2n}\, dx_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_m &= X_{m1}\, dx_1 + X_{m2}\, dx_2 + \ldots + X_{mn}\, dx_n. \end{aligned} \right.$$

Pour que ces équations soient *complètement intégrables,* c'est-à-dire pour qu'elles définissent m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ renfermant m constantes arbitraires, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{d\mathrm{X}_{ki}}{dx_j} = \frac{d\mathrm{X}_{kj}}{dx_i},$$

le d indiquant une dérivée totale, et par conséquent

$$\frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_j} + \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx_j} + \ldots = \frac{\partial \mathrm{X}_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{X}_{kj}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_i} + \ldots$$

ou bien

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial u_1}\mathrm{X}_{1j} + \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial u_2}\mathrm{X}_{2j} + \ldots = \frac{\partial \mathrm{X}_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{X}_{kj}}{\partial u_1}\mathrm{X}_{1i} + \ldots,$$

et cela quel que soit k.

Je n'insiste pas sur la démonstration bien connue de la formule (2) en tant que formule nécessaire; je vais maintenant essayer de démontrer qu'elle est suffisante.

Je suppose d'abord que l'on ait seulement, quels que soient k et i,

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{X}_{k1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{X}_{k1}}{\partial u_1}\mathrm{X}_{1i} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{X}_{k1}}{\partial u_m}\mathrm{X}_{mi} \\ &\quad = \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial u_1}\mathrm{X}_{11} + \ldots + \frac{\partial \mathrm{X}_{ki}}{\partial u_m}\mathrm{X}_{m1}. \end{aligned}\right.$$

Déterminons m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ au moyen des équations différentielles ordinaires

$$du_1 = \mathrm{X}_1\, dx_{11} \qquad du_2 = \mathrm{X}_{21}\, dx_1, \qquad \ldots \qquad du_m = \mathrm{X}_{m1}\, dx_1,$$

en supposant $x_2, \ldots, x_n$ constants; désignons par u_1^0, $u_2^0, \ldots, u_m^0$ les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ pour $x_1 = x_1^0$; ces valeurs pourront d'ailleurs être fonctions de x_2, $x_3, \ldots, x_n$; on aura alors

$$(4\ bis) \qquad \frac{du_1}{dx_1} = \mathrm{X}_{11}, \qquad \frac{du_2}{dx_1} = \mathrm{X}_{21}, \qquad \ldots \qquad \frac{du_m}{dx_1} = \mathrm{X}_{m1}.$$

Différentions ces équations par rapport à x_i, nous aurons des équations telles que

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_i} + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx_i},$$

où l'on doit supposer $p = 1, 2, \ldots, m$. Cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial x_i} &+ \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots \\ &+ \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}\right) \\ &+ \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1} X_{1i} + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m} X_{mi},\end{aligned}$$

ou, en vertu de l'identité (3),

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} &= \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{m1}\right) \\ &+ \frac{\partial X_{pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_1} X_{11} + \ldots + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_m} X_{m1},\end{aligned}$$

ou, en vertu de (4 *bis*),

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_p}{dx_1\, dx_i} &= \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_n}{dx_i} - X_{m1}\right) \\ &+ \frac{\partial X_{pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx_1},\end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx_1}\left(\frac{du_p}{dx_i} - X_{pi}\right) \\ &\quad = \frac{\partial X_{p1}}{\partial u}\left(\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}\right) + \ldots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m}\left(\frac{du_m}{dx_i} - X_{m1}\right).\end{aligned}$$

On a ainsi m équations que l'on déduit de celle-ci en faisant $p = 1, 2, 3, \ldots, m$: ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux m quantités

$$\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}, \qquad \frac{du_2}{dx_i} - X_{2i}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}.$$

si l'on considère ces m quantités comme des inconnues, on pourra considérer ces équations comme des équations différentielles ordinaires et, si on les intègre de manière que les inconnues s'annulent pour $x_1 = x_1^0$, on aura toujours

$$\frac{du_1}{dx_i} = X_{1i}, \qquad \frac{du_2}{dx_i} = X_{2i}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dx_i} = X_{mi}.$$

Cela revient à dire que, si les formules (3) sont identiques, ou, si l'on veut, que si les formules (2) sont identiques pour $j = 1$, et, si elles ont lieu, quels que soient $x_2, \ldots, x_n$ pour $x_1 = x_1^0$, les formules (1) sont intégrables, c'est-à-dire que les formules (2) sont toutes identiques. Autrement dit :

Si les formules (3) sont identiques et si le système suivant, où l'indice o indique que $x_1 = x_1^0$,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} du_1^0 = X_{12}^0\, dx_2 + \ldots + X_{1n}^0\, dx_n^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_m^0 = X_{m2}^0\, dx_2 + \ldots + X_{mn}^0\, dx_n^0, \end{array} \right.$$

est intégrable complètement, (1) le sera aussi, et, pour l'intégrer, il suffira d'intégrer les équations (4) en déterminant les constantes d'intégration $u_1^0, u_2^0, \ldots$ par les équations (5). On peut donc énoncer le théorème suivant qui comprend comme cas particulier celui qui a fait l'objet de mon travail cité tout à l'heure :

Pour que les équations (1) *soient complètement intégrables, il faut et il suffit que l'on ait, quels que soient* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, k *et* i,

$$\frac{\partial X_{k1}}{\partial x_i} + \sum_{\mu} \frac{\partial X_{k1}}{\partial u_\mu} X_{\mu i} = \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_1} + \sum_{\mu} \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_\mu} X_{\mu 1};$$

puis, pour $x_1 = x_1^0$, *quels que soient* $x_2, x_3, \ldots, x_m$, *k et i*,

$$\frac{\partial X_{k2}}{\partial x_i} + \sum_\mu \frac{\partial X_{k2}}{\partial u_\mu} X_{\mu i} = \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_2} + \sum_\mu \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_\mu} X_{\mu 2},$$

et ainsi de suite.

Pour intégrer le système (1), *on intègre le système*

$$\frac{du_1}{dx_1} = X_{11}, \qquad \frac{du_2}{dx_1} = X_{21}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m}{dx_1} = X_{m1},$$

et l'on détermine les valeurs u_1^0, u_2^0, ..., *que prennent* u_1, u_2, ... *pour* $x_1 = x_1^0$, *au moyen des équations*

$$\frac{du_1^0}{dx_2} = X_{12}^0, \qquad \frac{du_2^0}{dx_2} = X_{22}^0, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m^0}{dx_1} = X_{m2}^0,$$

X_{12}^0, ... *désignant les valeurs de* X_{12}, ... *pour* $x_1 = x_1^0$; *on détermine de même les valeurs* u_1^{00}, u_2^{00}, ... *de* u_1^0, u_2^0, ... *pour* $x_2 = x_2^0$, *au moyen des équations*

$$\frac{du_1^{00}}{dx_3} = X_{13}^{00}, \qquad \frac{du_2^{00}}{dx_3} = X_{23}^{00}, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_m^{00}}{dx_3} = X_{m3}^{00},$$

et ainsi de suite.

On retrouve ainsi, mais par une tout autre voie, la règle donnée par M. Mayer pour l'intégration des équations aux différentielles totales. (*A suivre.*)