NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Sur les conditions d'intégrabilité d'une expression différentielle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 19-24

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__19_0>

SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ D'UNE EXPRESSION DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. H. LAURENT.

On dit ordinairement que, pour que l'expression

$$(1) \qquad p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il faut et il suffit que les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations comprises dans le type

$$(2) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0$$

soient identiquement satisfaites; mais ce que l'on ne dit pas toujours, c'est que ces conditions peuvent être remplacées par d'autres moins générales.

Si l'on pose

$$p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i},$$

Jacobi a remarqué que l'on avait

$$(3) \qquad \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_j} = 0.$$

Ce résultat est facile à vérifier en effectuant les différentiations indiquées. Il en a conclu qu'une partie des relations (2) rentraient les unes dans les autres, lorsque n était plus grand que 3. Mais l'illustre géomètre aurait pu déduire d'autres conséquences de la formule (3). Supposons, en effet, $p_{ij} = 0$, $p_{ik} = -p_{ki} = 0$; on aura

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} = 0,$$

et, par suite, p_{ik} est indépendant de x_j ; il résulte de là que, si l'on a

$$p_{12}=0, \qquad p_{13}=0, \qquad \ldots, \qquad p_{1n}=0,$$

les quantités p_{ij}, où i et j sont différents de 1, sont indépendantes de x_1. Si donc elles sont nulles pour une valeur particulière x_1^0 de x_1, elles seront nulles, quel que soit x_1 ; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour que l'expression (1) *soit une différentielle exacte, il faut et il suffit :*

1° *Que l'on ait identiquement*

$$(4) \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial p_2}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial x_3}=\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial x_n}=\frac{\partial p_n}{\partial x_1};$$

2° *Que l'expression*

$$p_2\,dx_2+\ldots+p_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte relativement à $x_2, x_3, \ldots, x_n$ *pour* $x_1=x_1^0$.

En d'autres termes, les relations (2), dans lesquelles i et j sont différents de 1, n'ont besoin d'être satisfaites que pour $x_1=x_1^0$.

Cette remarque m'a permis de simplifier un certain nombre de théories relatives aux dérivées partielles; je vais montrer comment elle conduit de la façon la plus simple à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=f(x_1; x_2, \ldots, x_n, t, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

qui est le type auquel on peut ramener toutes les équations du premier ordre. Dans cette équation, u désigne une fonction inconnue des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ et de $p_1=\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, p_n=\frac{\partial u}{\partial x_n}$ ne contenant pas u explicitement.

Intégrer l'équation (1), c'est trouver des fonctions p_1, p_2, ..., p_n rendant l'expression

$$p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n + f\,dt$$

égale à une différentielle exacte du dont l'intégrale sera alors la fonction inconnue u. D'après notre remarque, il faudrait que l'on eût

$$(6) \qquad \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{df}{dx_1}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{df}{dx_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial p_n}{\partial t} = \frac{df}{dx_n}$$

identiquement, et que, pour $t = t^0$, on eût

$$(7) \qquad p_1 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{\partial \varpi}{\partial x_n},$$

ϖ désignant une fonction arbitraire de x_1, ..., x_n, à laquelle se réduira u pour $t = t^0$.

Les équations (6) doivent s'écrire

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1} p_{11} + \dfrac{\partial f}{\partial p_2} p_{21} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial p_n} p_{n1}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1} p_{12} + \dfrac{\partial f}{\partial p_2} p_{22} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial p_n} p_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

p_{ij} désignant, pour abréger, $\frac{\partial p_i}{\partial x_j}$. Je remplace ces équations par les suivantes :

$$(8\,bis) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1} p_{11} + \dfrac{\partial f}{\partial p_2} p_{12} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial p_n} p_{1n}, \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial p_1} p_{21} + \dfrac{\partial f}{\partial p_2} p_{22} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial p_n} p_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il faut intégrer le système (8), de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$p_i = \frac{\partial \varpi}{\partial x_i},$$

et alors p_1, p_2, ... seront les dérivées de la fonction u

satisfaisant à l'équation (5). Mais, en intégrant le système (8 *bis*), de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$p_i = \frac{\partial \varpi}{\partial x_i},$$

les fonctions p seront aussi les dérivées d'une certaine fonction, et l'on aura

$$p_{ij} = p_{ji},$$

et, par suite, les équations (8) auront, dans l'hypothèse où l'on s'est placé, les mêmes solutions que (8 *bis*). Ce sont alors les équations (8) que nous allons essayer d'intégrer.

On a

$$dp_1 = p_{11}\, dx_1 + p_{12}\, dx_2 + \ldots + p_{1n}\, dx_n + \frac{\partial p_1}{\partial t}\, dt,$$

$$dp_2 = p_{21}\, dx_1 + p_{22}\, dx_2 + \ldots + p_{2n}\, dx_n + \frac{\partial p_2}{\partial t}\, dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tirons $\frac{\partial p_1}{\partial t}, \frac{\partial p_2}{\partial t}, \cdots$ des équations (8) pour les porter dans celles-ci, elles deviendront

$$p_{11}\left(dx_1 - \frac{\partial f}{\partial p_1} dt\right) + \ldots + p_{1n}\left(dx_n + \frac{\partial f}{\partial p_n} dt\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dt - dp_1 = 0,$$

$$p_{21}\left(dx_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1} dt\right) + \ldots + p_{1n}\left(dx_n + \frac{\partial f}{\partial p_n} dt\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2} dt - dp_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et si l'on établit entre les x et les p les relations suivantes :

$$(9) \qquad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial p_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

il faudra, en vertu des équations précédentes, que l'on ait aussi

$$(10) \qquad \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dp_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Intégrons alors les équations (9) et (10) qui sont des équations différentielles ordinaires, de telle sorte que, pour $t = t^0$, on ait

$$x_i = x_i^0, \qquad p_i = p_i^0;$$

n des intégrales de ces équations devront être des conséquences des n autres, et les intégrales $p_1, p_2, \ldots$ des équations (8) s'obtiendront en écrivant n relations arbitraires entre $p_1^0, p_2^0, \ldots, x_1^0, x_2^0, \ldots$.

Prenons, pour ces relations arbitraires,

$$(11) \qquad p_1^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_1^0}, \qquad \ldots, \qquad p_n^0 = \frac{\partial \varpi}{\partial x_n^0},$$

$\varpi(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ désignant une fonction arbitraire de $x_1^0, \ldots, x_n^0$; les quantités p ainsi déterminées rendront $\Sigma p\,dx + f\,dt$ différentielle exacte d'une fonction u qui, pour $t = t^0$, se réduira à $\varpi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

En effet, soient

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \theta_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t), \qquad & p_2^0 &= \theta_2, \qquad & p_n &= \theta_n, \\ x_1^0 &= \psi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, t), \qquad & x_2^0 &= \psi_2, \qquad & x_n &= \psi_n \end{aligned}$$

les intégrales de (9), (10), les intégrales de (8) seront les résultantes provenant de l'élimination de $x_1^0, x_2^0, \ldots$ entre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varpi}{\partial x_1^0} &= \theta_1(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad & \frac{\partial \varpi}{\partial x_2^0} &= \theta_2, \qquad & \ldots, \\ x_1^0 &= \psi_1(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad & x_2^0 &= \psi_2, \qquad & \ldots. \end{aligned}$$

Si l'on fait $t = t^0$, ces formules devront être identiquement satisfaites pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots$; ainsi l'on a les identités

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x_1^0} = \theta_1(x_1^0, \ldots, x_n^0, t^0), \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial x_2^0} = \theta_2, \qquad \ldots.$$

Mais les x^0 étant arbitraires, on peut les remplacer par les x, et l'on a

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x_1} = \theta_1(x_1, \ldots, x_n, t^0), \qquad \ldots .$$

Mais $\theta_1(x_1, \ldots, x_n, t_0)$ est la valeur de p_1 pour $t = t^0$; donc, pour $t = t^0$, p_1, p_2, ... se réduisent aux dérivées de $\varpi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et u à la fonction ϖ, si l'on veut.

C. Q. F. D.