NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Méthode élémentaire pour calculer le rapport de la circonférence au diamètre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 5-30

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE POUR CALCULER LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE;

PAR M. L. MALEYX.

En étudiant la méthode inventée par Archimède pour déterminer une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre, j'ai été conduit à faire deux remarques principales.

La première consiste en ce que Archimède, en doublant le nombre des côtés d'un polygone régulier, fait varier à la fois le périmètre du polygone et les diamètres des cercles inscrit et circonscrit; ce fait distingue sa méthode de celle dite *des périmètres*, où l'on suppose que, le périmètre du polygone variant, le rayon du cercle circonscrit reste fixe, et de celle dite *des polygones isopérimètres*, où l'on suppose que le périmètre reste fixe. S'il existe une constante dans sa méthode, cette constante est le côté du polygone, et encore ne l'est-elle pas d'une manière absolue.

La deuxième remarque consiste en ce que l'application de ses principes peut être rendue plus simple que celle des principes des deux autres méthodes que je viens de citer.

J'ai fondé sur ces remarques une étude que je me propose de publier ultérieurement, et dont j'extrais ce qui suit.

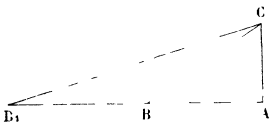
I. *Un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est représenté par* 1, *son hypoténuse par* D *et le second côté par d, l'angle opposé au premier côté l'étant par α; on se propose de calculer le second côté de l'angle droit d_1 et l'hypoténuse D_1 d'un second triangle rectangle dont le premier côté est aussi représenté par* 1, *et opposé à un angle égal à $\frac{\alpha}{2}$.*

Soit (*fig.* 1) ABC le premier triangle rectangle dans lequel on a

$$A = 1^{dt}, \quad ABC = \alpha, \quad AC = 1, \quad BC = D, \quad AB = d.$$

Pour construire le second, il suffira de prolonger AB de la longueur $BB_1 = BC = D$, et d'unir par une ligne

Fig. 1.



droite le point B_1 au point C; car, le triangle CBB_1 étant isoscèle par construction, on a

$$BB_1C = BCB_1 = \tfrac{1}{2} ABC.$$

On a du reste évidemment

$$AB_1 = d_1 = D + d$$

et, d'après le théorème de Pythagore,

$$B_1C = D_1 = \sqrt{d_1^2 + 1}.$$

II. *Extraction de la racine carrée d'un nombre donné sous la forme $a^2 + R$, d'après les données a et R, et sans effectuer le carré a^2.*

Prenons a pour valeur approchée par défaut de la racine cherchée, et soit $\frac{b}{10^\alpha}$ la valeur aussi approchée par défaut, et à moins de $\frac{1}{10^\alpha}$ de la partie complémentaire de la racine, on a

$$\left(a + \frac{b}{10^\alpha}\right)^2 \leq (a^2 + R);$$

développant le premier membre et réduisant,

$$2a \times \frac{b}{10^\alpha} + \frac{b^2}{10^{2\alpha}} \leq R,$$

d'où

$$\frac{b}{10^\alpha} \leq \frac{R}{2a}.$$

Nous pouvons développer le quotient $\frac{R}{2a}$ en fraction décimale, à moins de $\frac{1}{10^\alpha}$ par défaut, et, si $\frac{q}{10^\alpha}$ représente ce développement, R_1 étant le reste de la division, nous aurons

$$R = 2a \times \frac{q}{10^\alpha} + R_1$$

et, en conséquence,

$$\frac{b}{10^\alpha} \leq \frac{q}{10^\alpha} + \frac{R_1}{2a}, \quad \frac{R_1}{2a} < \frac{1}{10^\alpha}.$$

$\frac{b}{10^\alpha}$, étant un multiple de $\frac{1}{10^\alpha}$ contenu dans le second membre de l'inégalité précédente, ne peut surpasser $\frac{q}{10^\alpha}$, qui est le plus grand multiple de $\frac{1}{10^\alpha}$ contenu dans le même nombre ; $\frac{q}{10^\alpha}$ ne peut donc être que supérieur ou égal à $\frac{b}{10^\alpha}$, et, pour qu'il ne lui soit pas supérieur, il suffit que du nombre donné, $a^2 + R$, on puisse retrancher le carré de $a + \frac{q}{10^\alpha}$, c'est-à-dire qu'on ait l'inégalité

$$\left(a + \frac{q}{10^\alpha}\right)^2 \leq a^2 + R$$

ou

$$2a \times \frac{q}{10^{\alpha}} + \frac{q^2}{10^{2\alpha}} \leq R$$

ou encore

$$\frac{q^2}{10^{2\alpha}} \leq R_1.$$

Si donc on développe le quotient de la division de R par $2a$ en décimales, tant que le carré de la partie trouvée au quotient ne surpassera pas le reste de la division, cette partie sera égale à la partie complémentaire de la racine, à moins d'une unité du dernier ordre, et par défaut.

Supposons que nous nous arrêtions dans la division de R par $2a$ à la partie $\frac{q}{10^{\alpha}}$ du quotient, $\frac{q^2}{10^{2\alpha}}$ ne surpassant pas le reste R_1 de la division, et désignons par R_2 l'excès de R_1 sur $\frac{q^2}{10^{2\alpha}}$; nous aurons successivement

$$\frac{q^2}{10^{2\alpha}} + R_2 = R_1,$$

$$\frac{q^2}{10^{2\alpha}} + R_2 = R - 2a \times \frac{q}{10^{\alpha}};$$

d'où, ajoutant aux deux membres $a^2 + 2a \times \frac{q}{10^{\alpha}}$,

$$\left(a + \frac{q}{10^{\alpha}}\right)^2 + R_2 = a^2 - R.$$

On pourra alors reprendre le calcul précédent en traitant $a + \frac{q}{10^{\alpha}}$ et R_2 de la même manière que a et R, et continuer ainsi jusqu'à ce que l'on ait obtenu une valeur suffisamment approchée de la racine cherchée.

Observations. — On pourra encore abréger le calcul en ne conservant que la partie utile des produits qu'on devra successivement retrancher dans les divisions qu'on aura à faire, à condition de tenir compte à la fin du calcul des erreurs commises sur ces produits.

III. Pour ne rien laisser à désirer, donnons un exemple de ce calcul : soit à extraire la racine carrée de la somme $(3,7320508075568 + \alpha)^2 + 1$, α étant un nombre positif inconnu, mais moindre que $\frac{1}{10^{12}}$. Agissons comme si α était nul, nous en tiendrons compte ultérieurement; commençons la division de 1 par le double de la partie entre parenthèses diminuée de α, ne conservant dans chaque produit que la partie représentant des unités de l'ordre $\frac{1}{10^{10}}$:

$$\begin{array}{r|l}
1,000000000000000 & 7.464101615136 \\ \cline{2-2}
7464101815136 & 0,13 \\ \cline{1-1}
25358983848640 & \\
22392304845408 & \\ \cline{1-1}
2966679003232 &
\end{array}$$

Retranchons du second reste le carré de la partie trouvée au quotient $(0,13)^2 = 0,0169$, puis divisons le résultat de cette soustraction par la somme du diviseur précédent et du double de la partie trouvée au quotient, 0,26:

$$\begin{array}{r|l}
0,02966679003232 & \\
0,0169 & \\ \cline{1-1}
0,012766790032320 & 7,724101615136 \\ \cline{2-2}
7724101615136 & 0,001652 \\ \cline{1-1}
5042688417184 & \\
4634460969078 & \\ \cline{1-1}
408227448106 & \\
386205080755 & \\ \cline{1-1}
22022367351 & \\
15448203230 & \\ \cline{1-1}
6574164121 &
\end{array}$$

Opérons sur le nouveau quotient comme sur le précédent, modifions de même le diviseur et poursuivons :

$$
\begin{array}{r|l}
0{,}000006574164121 & \\
(0{,}001652)^2 = 0{,}000002729104 & \\
\hline
3845060121 & 7{,}727405615136 \\
3090962244 & \overline{0{,}000000497587} \\
\hline
754097877 & \\
695466504 & \\
\hline
58631373 & \\
54091835 & \\
\hline
4539538 & \\
3863700 & \\
\hline
675838 & \\
618192 & \\
\hline
57646 & \\
54089 & \\
\hline
3557 &
\end{array}
$$

Dans les opérations que nous venons d'exécuter, les produits que nous avons successivement retranchés du dividende initial sont trop faibles : il en résulte que le reste final est trop grand de la somme des parties négligées dans chaque produit ; il est facile de former une limite supérieure de la somme de ces parties négligées.

Nous avons d'abord négligé le produit de 2α (partie complémentaire du diviseur) par le nombre formé des trois premiers chiffres des quotients obtenus, soit $0{,}131$; cette première partie négligée a une valeur moindre que $0{,}131 \times \frac{2}{10^{12}} = \frac{131 \times 2}{10^{15}}$.

En second lieu, dans chacun des produits suivants, la partie négligée n'atteint pas un nombre d'unités de l'ordre $\frac{1}{10^{15}}$ marqué par le chiffre employé au multiplicateur ; donc la somme des parties négligées n'atteint pas le produit

$$\frac{1}{10^{15}} \times (131 \times 2 + 6 + 5 + 2 + 4 + 9 + 7 + 5 + 8 + 7),$$

et, si nous désignons cette somme par E, nous aurons

$$E < \frac{315}{10^{15}}.$$

De là résulte que, si nous désignons par R le reste final exact, nous avons les inégalités

$$\frac{3557 - 315}{10^{15}} = \frac{3242}{10^{15}} < R < \frac{3557}{10^{15}}.$$

Le dernier quotient trouvé ne pourrait être que trop grand, puisque nous avons opéré sur des dividendes trop grands, et il ne l'est pas, en tant que quotient, puisque son produit par le diviseur retranché du dividende fournit le reste R qui est positif; il n'est pas trop grand non plus, en tant que partie complémentaire de la racine, puisque son carré est inférieur à $\frac{25}{10^{14}}$ qui est lui-même certainement inférieur à R.

Donc la partie complémentaire de la racine carrée cherchée est, à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut,

$$0,131652497587,$$

et la racine carrée est elle-même :

$$3,863703305155,$$

à moins de $\frac{2}{10^{12}}$ par défaut.

IV. L'exemple sur lequel nous venons d'appliquer le procédé d'extraction de la racine carrée exposé au n° II n'a pas été pris au hasard; si dans le triangle rectangle ABC, considéré au nº I, nous supposons

$$BC = D = 2,$$

nous aurons

$$AB = d = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \alpha = 30^{\circ}.$$

Or $\sqrt{3}$ est égale à $1,732050807568$, à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut; dès lors, et par application des formules du nº I, nous aurons, en partant des données,

$$D = 2,$$

$$d = \sqrt{3} = 1,732050807568 \text{ à moins de } \frac{1}{10^{12}} \text{ par défaut,}$$

$$d_1 = 3,732050807568 \quad \text{»} \quad \frac{1}{10^{12}} \quad \text{»}$$

$$D_1 = 3,863703305155 \quad \text{»} \quad \frac{2}{10^{12}} \quad \text{»}$$

l'angle compris entre D_1 et d_1 étant de 15°.

On voit du reste immédiatement, en unissant le point A au point milieu de BC, ou à celui de B_1C, que D et d sont les diamètres des cercles circonscrit ou inscrit à l'hexagone régulier dont le côté est 1, et que D_1 et d_1 sont les diamètres des cercles circonscrit et inscrit au dodécagone régulier ayant aussi pour côté 1.

Reprenant deux fois le même calcul à partir de D_1 et d_1, nous nous procurerons de même les diamètres D_2 et d_2, D_3 et d_3, des cercles circonscrit et inscrit aux polygones réguliers de vingt-quatre et quarante-huit côtés, respectivement, et ayant chacun pour côté 1.

V. Les détails dans lesquels nous sommes entrés à l'occasion de ces calculs, dans le nº III, doivent nous dispenser de les rapporter *in extenso* : nous n'en donnerons donc que les résultats.

Toutefois, avant de les inscrire, nous ferons la remarque suivante, qui nous conduira à une notation utile : on voit que, dans chaque calcul, tel que celui du n° III, on ne fait que déterminer la différence qui existe entre les diamètres des cercles circonscrit et inscrit à un même polygone régulier dont le côté est 1; nous désignerons donc, d'une façon générale, par D_k et d_k les diamètres des cercles circonscrit et inscrit au polygone régulier dont le côté est 1, et dont le nombre des côtés est 6×2^k, et par Δ_k la différence $D_k - d_k$.

Cela posé, les résultats trouvés sont caractérisés par les égalités suivantes :

$d_2 = D_1 + d_1 =$	$7{,}595754112723$	à moins de $\frac{3}{10^{12}}$	par défaut.
$\Delta_2 =$	$0{,}065543462815$	» $\frac{1}{10^{12}}$	»
$D_2 = d_2 + \Delta_2 =$	$7{,}661297575538$	» $\frac{4}{10^{12}}$	»
$d_3 = D_2 + d_2 =$	$15{,}257051688261$	» $\frac{7}{10^{12}}$	»
$\Delta_3 =$	$0{,}032736610412$	» $\frac{1}{10^{12}}$	»
$D_3 = d_3 + \Delta_3 =$	$15{,}289788298673$	» $\frac{8}{10^{12}}$	»

VI. La partie la plus penible de ces calculs est évidemment la détermination des nombres Δ : aussi est-on conduit à rechercher s'il n'existe pas quelque propriété géométrique de la figure qui nous permette d'atteindre plus facilement ce résultat.

Reprenons la figure du n° I et ajoutons *y* la circonférence décrite de B comme centre avec $BC = D$ pour rayon, elle coupe AB en B_1 et en E, joignons CE par une ligne droite; conservant les notations des numéros précédents, nous aurons

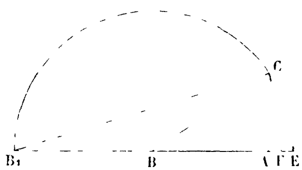
$$BE - BA = D - d = AE = \Delta.$$

Dans le triangle ACE (*fig.* 2), l'angle ACE est égal à l'angle

$$BB_1C = \frac{\alpha}{2},$$

car ils ont leurs côtés respectivement perpendiculaires et sont tous les deux aigus; donc, pour avoir la diffé-

Fig. 2.



rence $AE = \Delta$, il suffira de construire CE faisant avec CA l'angle $ACE = \frac{1}{2}ABC$; de même, pour avoir la différence

$$AF = B_1C - B_1A = D_1 - d_1 = \Delta_1,$$

il suffira de construire la droite CF faisant avec CA l'angle $ACF = \frac{1}{2}AB_1C$. On conclut de cette construction que CF est bissectrice de l'angle ACE et de la propriété connue de cette droite, l'égalité de rapports

$$\frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta_1} = \frac{CE}{CA} = \sqrt{\Delta^2 + 1}.$$

Élevons les deux membres au carré et ramenons à la forme entière

$$\Delta^2 - 2\Delta\Delta_1 + \Delta_1^2 = \Delta_1^2(\Delta^2 + 1).$$

Réduisant et transposant,

$$\Delta\Delta_1^2 + 2\Delta_1 - \Delta = 0.$$

Cette équation du second degré définit Δ_1 au moyen de Δ par sa racine positive; mais, comme Δ a généralement une petite valeur, on peut calculer Δ_1 au moyen d'une suite d'inégalités que nous allons déduire de l'équation même, et sans extraction de racine carrée.

Nous pouvons donner à l'équation précédente la forme

$$(1)\qquad \Delta_1 = \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta\Delta_1^2 :$$

d'où l'inégalité évidente

$$\Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Remplaçons dans l'équation (1), et au second membre seulement, Δ_1 par le nombre plus grand $\frac{1}{2}\Delta$; nous aurons

$$\Delta_1 > \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3.$$

Ainsi, en prenant pour valeur approchée par excès de Δ_1 la valeur $\frac{1}{2}\Delta$, l'erreur commise a pour limite supérieure $\frac{1}{8}\Delta^3$.

Si nous remplaçons maintenant au second membre de l'équation (1) Δ_1 par le nombre plus petit $\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^3$, nous aurons, en négligeant un terme soustractif, ce qui ne fait qu'augmenter l'inégalité,

$$\Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3 + \tfrac{1}{16}\Delta^5.$$

Dès lors, en prenant pour valeur approchée par défaut de Δ_1 la différence $\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^3$, l'erreur commise sera inférieure à $\frac{1}{16}\Delta^5$.

Enfin, en substituant à Δ_1 dans le second membre de l'équation (1) la valeur trop grande $\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^3 + \frac{1}{16}\Delta^5$, nous aurons, en négligeant des termes dont la somme est certainement positive,

$$\Delta_1 > \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3 + \tfrac{1}{16}\Delta^5 - \tfrac{5}{16}\Delta^7;$$

d'où l'on conclut que si, dans la suite

$$\tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3 + \tfrac{1}{16}\Delta^5 - \tfrac{5}{16}\Delta^7,$$

on prend un, deux ou trois termes comme valeur approchée de Δ_1, cette valeur est approchée par excès ou par défaut suivant qu'on s'arrête à un terme affecté du signe $+$ ou du signe $-$, et que, dans tous les cas, la valeur absolue du premier terme négligé est limite supérieure de l'erreur commise.

Ces inégalités permettent de calculer un des nombres Δ au moyen du précédent avec une assez grande approximation : on pourrait même l'obtenir avec une approximation illimitée par l'emploi de l'égalité (1) et par la méthode des approximations successives ; mais leur emploi est encore pénible, eu égard aux multiplications à faire : aussi ne ferons-nous usage dans ce qui suit que des inégalités

$$\tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{8}\Delta^3 < \Delta_1 < \tfrac{1}{2}\Delta,$$

et nous allons nous occuper d'établir des formules se déduisant de l'équation (1) et permettant d'arriver au même résultat au moyen d'opérations plus simples.

VII. Reprenons l'égalité initiale réduite du n° VI

$$\Delta - 2\Delta_1 - \Delta\Delta_1^2 = 0, \tag{1}$$

d'où

$$\Delta = \frac{2\Delta_1}{1-\Delta_1^2}. \tag{1'}$$

Appliquons-la aux différences d'ordre supérieur de une unité

$$\Delta_1 - 2\Delta_2 - \Delta_1\Delta_2^2 = 0, \tag{2}$$

d'où

$$\Delta_1 = \frac{2\Delta_2}{1-\Delta_2^2}. \tag{2'}$$

Δ étant peu différent de $2\Delta_1$, et Δ_1 l'étant peu de $2\Delta_2$, la valeur numérique du dernier terme du premier membre de l'égalité (1) est sensiblement égale à huit fois celle du terme correspondant de l'égalité (2); retranchant les égalités (1) et (2) membre à membre après avoir multiplié la seconde par 8, on a

$$(3)\qquad \Delta - 10\Delta_1 + 16\Delta_2 - \Delta_1(\Delta\Delta_1 - 8\Delta_2^2) = 0.$$

Transformons le dernier terme du premier membre de l'égalité (3); si nous multiplions membre à membre l'égalité (1)' et l'égalité obtenue en élevant au carré les deux membres de l'égalité (2)', nous aurons

$$\Delta\Delta_1 = \frac{8\Delta_2^2}{(1-\Delta_1^2)(1-\Delta_2^2)^2}.$$

Remplaçons au dénominateur Δ_1 par sa valeur tirée de l'égalité (2)'

$$\Delta\Delta_1 = \frac{8\Delta_2^2}{(1-\Delta_2^2)^2 - 4\Delta_2^2}.$$

De là on déduit

$$\begin{aligned}\Delta\Delta_1 - 8\Delta_2^2 &= 8\Delta_2^2\left[\frac{1}{(1-\Delta_2^2)^2-4\Delta_2^2} - 1\right]\\ &= 8\Delta_2^2 \times \frac{6\Delta_2^2 - \Delta_2^4}{(1-\Delta_2^2)^2 - 4\Delta_2^2}.\end{aligned}$$

En substituant au dénominateur $\frac{2\Delta_2}{\Delta_1}$ à $1-\Delta_2^2$ qui lui est égal, d'après l'égalité (2)',

$$\Delta\Delta_1 - 8\Delta_2^2 = 8\Delta_2^2 \times \frac{6\Delta_2^2 - \Delta_2^4}{\frac{4\Delta_2^2}{\Delta_1^2} - 4\Delta_2^2} = 8\Delta_2^2\Delta_1^2 \times \frac{6-\Delta_2^2}{4(1-\Delta_1^2)}.$$

Remplaçons enfin au dénominateur de la dernière fraction $1-\Delta_1^2$ par sa valeur $\frac{2\Delta_1}{\Delta}$ déduite de l'égalité (1)', on a, après réduction,

$$\Delta\Delta_1 - 8\Delta_2^2 = \Delta\Delta_1\Delta_2^2(6-\Delta_2^2):$$

d'où, reportant dans l'égalité (3), on a

$$(a)\qquad \Delta - 10\Delta_1 + 16\Delta_2 - \Delta\Delta_1^2\Delta_2^2(6-\Delta_2^2) = 0.$$

De l'égalité (a) on peut déduire

$$\Delta_2 = \frac{1}{16}(10\Delta_1 - \Delta) - \frac{(6 - \Delta_2^2)\Delta\Delta_1^2\Delta_2^2}{16}.$$

Le premier terme du second membre fournit une valeur approchée par défaut de Δ_2, et le second terme qui représente l'erreur est moindre que

$$\frac{6\Delta\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\left(\frac{\Delta}{4}\right)^2}{16} = \frac{3}{512}\Delta^5 < \frac{\Delta^5}{170}.$$

VIII. Reprenons encore l'égalité (a) du numéro précédent, et appliquons-la aux différences d'indice supérieur d'une unité :

$$(a) \qquad \Delta - 10\Delta_1 + 16\Delta_2 - \Delta\Delta_1^2\Delta_2^2(6 - \Delta_2^2) = 0,$$

$$(b) \qquad \Delta_1 - 10\Delta_2 + 16\Delta_3 - \Delta_1\Delta_2^2\Delta_3^2(6 - \Delta_3^2) = 0.$$

Retranchons membre à membre de l'égalité (a) l'égalité (b) dont les deux membres ont été précédemment multipliés par 32 ; on en déduit

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta - 42\Delta_1 + 336\Delta_2 - 512\Delta_3 \\ \quad - \Delta_1\Delta_2^2[\Delta\Delta_1(6 - \Delta_2^2) - 32\Delta_3^2(6 - \Delta_3^2)] = 0 \end{array} \right.$$

Nous allons réduire la parenthèse du dernier terme de l'égalité (c) en l'exprimant d'abord au moyen de Δ_3 ; nous avons trouvé dans le numéro précédent l'expression du produit $\Delta\Delta_1$ au moyen de Δ_2 ; on en déduit, en tenant compte de l'égalité $\Delta_2 = \frac{2\Delta_3}{1 - \Delta_3^2}$,

$$\begin{aligned} \Delta\Delta_1(6 - \Delta_2^2) &= \frac{8\Delta_2^2(6 - \Delta_2^2)}{(1 - \Delta_2^2)^2 - 4\Delta_2^2} \\ &= \frac{\frac{32\Delta_3^2}{(1 - \Delta_3^2)^2}\left[6 - \frac{4\Delta_3^2}{(1 - \Delta_3^2)^2}\right]}{\left[1 - \frac{4\Delta_3^2}{(1 - \Delta_3^2)^2}\right]^2 - \frac{16\Delta_3^2}{(1 - \Delta_3^2)^2}} \\ &= \frac{32\Delta_3^2[6(1 - \Delta_3^2)^2 - 4\Delta_3^2]}{[(1 - \Delta_3^2)^2 - 4\Delta_3^2]^2 - 16\Delta_3^2(1 - \Delta_3^2)^2}. \end{aligned}$$

La parenthèse du dernier terme de l'égalité (c) peut alors, par substitution de la valeur précédente, s'écrire sous la forme

$$\frac{32\Delta_3^2}{[(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2]^2-16\Delta_3^2(1-\Delta_3^2)^2} \times \Big\{6(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2-(6-\Delta_3^2)\big\{[(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2]^2-16\Delta_3^2(1-\Delta_3^2)^2\big\}\Big\}$$

Effectuons les calculs indiqués dans la parenthèse; l'expression précédente devient

$$\frac{32\Delta_3^2}{[(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2]^2-16\Delta_3^2(1-\Delta_3^2)^2} \times \Delta_3^2(153-442\Delta_3^2+238\Delta_3^4-34\Delta_3^6+\Delta_3^8).$$

Transformons actuellement le facteur fractionnaire en remplaçant dans son dénominateur $(1-\Delta_3^2)$ par la quantité égale $\frac{2\Delta_3}{\Delta_2}$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{32\Delta_3^2}{[(1-\Delta_3^2)^2-4\Delta_3^2]^2-16\Delta_3^2(1-\Delta_3^2)^2} &= \frac{32\Delta_3^2}{\left(\frac{4\Delta_3^2}{\Delta_2^2}-4\Delta_3^2\right)^2-16\Delta_3^2\times\frac{4\Delta_3^2}{\Delta_2^2}} \\ &= \frac{2\Delta_2^4}{\Delta_3^2[(1-\Delta_2^2)^2-4\Delta_2^2]}.\end{aligned}$$

Remplaçons de nouveau $(1-\Delta_2^2)$ par la fraction égale $\frac{2\Delta_2}{\Delta_1}$; nous trouvons, pour valeur du facteur fractionnaire,

$$\frac{2\Delta_2^4}{\Delta_3^2[(1-\Delta_2^2)^2-4\Delta_2^2]} = \frac{2\Delta_2^4}{\Delta_3^2\left(\frac{4\Delta_2^2}{\Delta_1^2}-4\Delta_2^2\right)} = \frac{\Delta_2^2\times\Delta_1^2}{2\Delta_3^2(1-\Delta_1^2)}.$$

Substituons enfin à $1-\Delta_1^2$ la valeur égale $\frac{2\Delta_1}{\Delta}$

$$\frac{\Delta_2^2\times\Delta_1^2}{2\Delta_3^2(1-\Delta_1^2)} = \frac{\Delta\Delta_1\Delta_2^2}{4\Delta_3^2}:$$

Il en résulte que la parenthèse du dernier terme de l'égalité (c) peut s'écrire

$$\frac{\Delta\Delta_1\Delta_2^2}{4}(153 - 442\Delta_3^2 - 238\Delta_3^4 - 34\Delta_3^6 + \Delta_3^8),$$

et qu'enfin l'égalité (c) peut prendre la forme

$$(d)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta - 42\Delta_1 - 336\Delta_2 - 512\Delta_3 \\ \quad - \dfrac{\Delta\Delta_1^2\Delta_2^4}{4}(153 - 442\Delta_3^2 + 238\Delta_3^4 - 34\Delta_3^6 + \Delta_3^8) = 0 : \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \Delta_3 = {} & \frac{1}{512}[(8\Delta_2 - \Delta_1) \times 42 + \Delta] \\ & - \frac{\Delta\Delta_1^2\Delta_2^4}{2048}(153 - 442\Delta_3^2 + 238\Delta_3^4 - 34\Delta_3^6 - \Delta_3^8) \end{aligned}$$

Comme la parenthèse du second terme du second membre est évidemment positive pour les valeurs de Δ_3 qui ne surpassent pas $\sqrt{\frac{153}{442}}$ et à plus forte raison $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{153}{442}}$; que de plus, pour les mêmes valeurs de Δ_3, cette parenthèse a une valeur inférieure à 153, il en résulte que le premier terme du second membre peut être pris comme valeur approchée par excès de Δ_3, et que l'erreur commise est moindre que la fraction $\frac{153\,\Delta\Delta_1^2\Delta_2^4}{2048}$, qui admet elle-même, comme limite supérieure, $\frac{153\,\Delta^7}{2048 \times 2^{10}} = \frac{153\,\Delta^7}{2^{21}}$.

IX. Les formules établies aux n^os VI, VII et VIII, prises sous les formes

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta\Delta_1^2,$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{16}(10\Delta_1 - \Delta) - \frac{(6 - \Delta_2^2)\Delta.\Delta_1^2.\Delta_2^2}{16},$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 = {} & \frac{1}{512}[(8\Delta_2 - \Delta_1) \times 42 + \Delta] \\ & - \frac{\Delta\Delta_1^2\Delta_2^4}{2048}(153 - 442\Delta_3^2 - 238\Delta_3^4 - 34\Delta_3^6 + \Delta_3^8),\end{aligned}$$

permettent de calculer une des valeurs Δ au moyen de la précédente, ou des deux ou trois précédentes, avec une approximation indéfinie, à l'aide de la méthode des approximations successives, et cela indépendamment des valeurs de D et d.

On pourrait encore les appliquer en suivant des méthodes diverses pour obtenir des valeurs approchées de l'inconnue, mais le procédé qui nous paraît le plus avantageux, et celui que nous allons appliquer, consiste à prendre pour valeur approchée du premier membre le premier terme du second ; nous éviterons ainsi l'emploi des logarithmes, et nous obtiendrons une approximation suffisante, pourvu que Δ soit assez petit.

Nous avons déjà trouvé directement, aux n^{os} III et V, les valeurs

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 0{,}131652497587\ldots,\\ \Delta_2 &= 0{,}065543462815\ldots,\\ \Delta_3 &= 0{,}032736610412\ldots,\end{aligned}$$

chacune de ces valeurs étant approchée à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut.

En acceptant comme valeur approchée par excès de Δ_4 $\frac{1}{512}[(8\Delta_3 - \Delta_2) \times 42 + \Delta_1]$, l'erreur sera, d'après la fin du n^o VIII, inférieure à $\frac{153 \times 132^7}{2^{21} \times 10^{21}}$.

Mais on a évidemment les égalités ou inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{153 \times 132^7}{2^{21} \times 10^{21}} &= \frac{153 \times 33^7}{2^7 \times 10^{21}}\\ &= 153 \times \left(\frac{33}{100}\right)^7 \times \frac{1}{2^7 \times 10^7} < 153 \times \frac{1}{3^7} \times \frac{1}{2^7 \times 10^7}\\ &= \frac{17}{3^5 \times 2^7 \times 10^7} < \frac{55}{10^{12}}.\end{aligned}$$

Si nous faisons le calcul de

$$\frac{1}{512}[(8\Delta_3 - \Delta_2) \times 42 + \Delta_1].$$

en prenant les valeurs approchées que nous avons trouvées pour Δ_1, Δ_2, Δ_3, la première et la dernière par excès, la seconde par défaut, nous aurons pour valeur approchée par excès $0,0163639 22185$, quotient décimal approché à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par excès; du reste, l'erreur commise en remplaçant Δ_1, Δ_2, Δ_3 par leurs valeurs approchées n'atteint pas

$$\frac{1}{10^{12}} \times \frac{1}{512} \times (336 + 42 + 1) < \frac{1}{10^{12}},$$

d'où résulte qu'on peut prendre le quotient

$$0,016363922185$$

comme valeur approchée par excès de Δ_4 à moins de $\frac{57}{10^{12}}$, et le nombre $0,016363922128$ comme valeur approchée par défaut du même nombre, avec la même limite d'erreur.

Si actuellement nous répétons des calculs analogues pour trouver une valeur approchée de Δ_5 au moyen de Δ_2, Δ_3, Δ_4, en observant que la limite supérieure du terme négligé, à savoir $\frac{153\,\Delta_2\,\Delta_3^2\,\Delta_4^4}{2048}$, est moindre que le $\frac{1}{128}$ de celle du terme négligé dans le calcul précédent, puisque Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont respectivement moindres que les moitiés de Δ_1, Δ_2, Δ_3, et qu'en conséquence ce terme négligé est moindre que $\frac{55}{10^{14}}$; que, de plus, l'erreur commise en substituant à Δ_2, Δ_3, Δ_4 leurs valeurs approchées, et en développant le quotient en fraction décimale à moins de $\frac{1}{10^{12}}$, par excès, est moindre que

$$\frac{1}{10^{12}} \times \frac{1}{512} \times (336 \times 57 + 42 + 1) + \frac{1}{10^{12}} < \frac{39}{10^{12}},$$

nous en conclurons qu'on peut prendre comme valeur approchée de Δ_5 par excès et à moins de $\frac{40}{10^{12}}$ le nombre $0,008181413437$, et comme valeur approchée de Δ_5 par défaut et avec la même approximation le nombre

$$0,008181413397;$$

d'où

$$0,016363922128 < \Delta_4 < 0,016363922185,$$
$$0,008181413397 < \Delta_5 < 0,008181413437.$$

X. Les valeurs de Δ auxquelles nous sommes actuellement parvenus sont suffisamment petites pour que nous puissions faire usage de la formule établie au n° VII pour obtenir les valeurs consécutives de Δ; nous accepterons donc, comme valeur approchée par défaut de Δ_6, $\frac{1}{16}(10\,\Delta_5 - \Delta_4)$, et nous avons vu à la fin du n° VII que la limite de l'erreur commise était $\frac{\Delta_4^5}{170} < \frac{8}{10^{12}}$. Calculons $\frac{1}{16}(10\Delta_5 - \Delta_4)$, par défaut, en prenant Δ_5 par défaut et Δ_4 par excès; la limite de l'erreur commise sera $\frac{1}{16}(10 \times 40 + 57) \times \frac{1}{10^{12}}$, moindre que $\frac{29}{10^{12}}$. Il résulte de là que la valeur approchée par défaut et à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ de

$$\tfrac{1}{16}(0,08181413970 - 0,016363922185)$$

est aussi approchée par défaut de Δ_6 à moins de $\frac{38}{10^{12}}$; d'où

$$0,004090638236 < \Delta_6 < 0,004090638274.$$

On trouve de même, par l'emploi réitéré de la même formule et en prenant les mêmes précautions relatives à l'approximation,

$$0,002045310557 < \Delta_7 < 0,002045310586,$$
$$0,001022654206 < \Delta_8 < 0,001022654229.$$

Nous avons ainsi trouvé des valeurs approchées de Δ_6 à moins de $\frac{38}{10^{12}}$, de Δ_7 à moins de $\frac{29}{10^{12}}$ et de Δ_8 à moins de $\frac{23}{10^{12}}$.

Δ_8 est assez petit, comme nous allons le voir, pour que nous puissions tirer tout le parti possible des nombres que nous avons calculés, en tenant compte des erreurs qui les affectent.

XI. Nous avons posé au n° V $\Delta_k = D_k - d_k$, nous avons du reste vu, d'après le n° I, que

$$d_{k+1} = D_k + d_k;$$

on en déduit

$$d_{k+1} = 2d_k + \Delta_k.$$

Faisant varier k, on trouve

$$\begin{aligned} d_4 &= 2d_3 \quad + \Delta_3, \\ d_5 &= 2d_4 \quad + \Delta_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_p &= 2d_{p-1} + \Delta_{p-1}. \end{aligned}$$

Multipliant ces égalités par les puissances décroissantes de 2 à partir de 2^{p-4}, on trouve, en les ajoutant membre à membre,

$$(1) \qquad d_p = 2^{p-3} d_3 + 2^{p-4} \Delta_3 + 2^{p-5} \Delta_4 + \ldots + 2\Delta_{p-2} + \Delta_{p-1}.$$

Si nous posons $p = 8$, nous aurons

$$(2) \qquad d_8 = 2^5 d_3 + 2^4 \Delta_3 + 2^3 \Delta_4 + 2^2 \Delta_5 + 2\Delta_6 + \Delta_7.$$

Remplaçons dans cette égalité (2) d_3, Δ_3, Δ_4, ..., Δ_7, par les valeurs approchées par défaut que nous en avons trouvées, nous aurons une valeur approchée par défaut de d_8, et la limite supérieure de l'erreur commise sur d_8 s'obtiendra en remplaçant au second membre de l'égalité (2) d_3, Δ_3, ..., Δ_7, chacun par la limite supérieure de l'erreur commise sur ce nombre.

Nous rapportons ci-dessous le Tableau de ce calcul, en observant que nous n'écrivons que le numérateur de la limite supérieure de chaque erreur, tous ces nombres ayant pour dénominateur commun 10^{12}.

Sur une ligne horizontale nous écrivons séparément la valeur approchée par défaut de d_3 et le numérateur de la limite de l'erreur commise sur ce nombre. Nous multiplions ces deux nombres par 2; les produits sont placés sur la seconde ligne horizontale. A ces produits nous ajoutons respectivement la valeur approchée par défaut de Δ_3, et le numérateur de la limite de l'erreur commise sur Δ_3; nous multiplions les sommes par 2, et nous continuons de même jusqu'à ce que nous ayons fait l'addition de la valeur approchée par défaut de Δ_7 et du numérateur de la limite de l'erreur correspondante.

15,257051688261	7
30,514103376522	14
32736610412	1
30,546839986934	15
61,093679973868	30
16363922128	57
61,110043895996	87
122,220087791992	174
8181413397	40
122,228269205389	214
244,456538410778	428
4090638236	38
244,460629049014	466
488,921258098028	932
2045310557	29
488,923303408585	961

De là nous pouvons conclure que d_8 admet pour valeur approchée par défaut 488,923303408585, et que la limite supérieure de l'erreur est $\frac{961}{10^{12}}$.

XII. Par le procédé employé au nº XI, on trouve l'égalité

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} d_{p+n} = 2^n d_p + 2^{n-1}\Delta_p + 2^{n-2}\Delta_{p+1} + \ldots \\ + 2\Delta_{p+n-2} + \Delta_{p+n-1}. \end{aligned} \right.$$

Si k est le nombre des côtés du polygone admettant pour diamètre du cercle inscrit d_p, d_{p+n} est le diamètre du cercle inscrit dans le polygone dont le nombre des côtés est $k \times 2^n$, et dont le périmètre est aussi représenté par $k \times 2^n$; nous pouvons en conclure, d'après l'égalité des rapports des périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés à celui des diamètres des cercles qui leur sont respectivement inscrits, que $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ est le diamètre du cercle inscrit, dans le polygone régulier dont le nombre des côtés est $k \times 2^n$ et dont le périmètre est k.

Divisant les deux membres de la dernière égalité (1) par 2^n, on en déduit

$$\frac{d_{p+n}}{2^n} = d_p + \frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{2^2}\Delta_{p+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n-1}.$$

On trouve de même, pour le diamètre du cercle circonscrit au même polygone,

$$\frac{D_{p+n}}{2^n} = d_p + \frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{2^2}\Delta_{p+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n-1} + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n}.$$

On voit facilement, d'après ces égalités, que $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ croît avec n, tandis que $\frac{D_{p+n}}{2^n}$ décroît dans les mêmes circonstances, tout en restant supérieur à $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ d'une quantité qui a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment; du reste, $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ et $\frac{D_{p+n}}{2^n}$ comprennent entre eux le diamètre de la circonférence dont la longueur est k; on peut donc considérer le diamètre de cette circonférence dont la longueur est k comme la limite vers laquelle tend $\frac{d_{p+n}}{2^n}$ quand n augmente au delà de toute limite, et nous poserons

$$\theta = \lim \frac{d_{p+n}}{2^n}.$$

XIII. D'après les inégalités établies au n° VI, nous pouvons écrire

$$\begin{array}{llll}
\Delta_p & & = \Delta_p & = \Delta_p, \\
\frac{1}{2}\Delta_p & -\frac{1}{8}\Delta_p^3 & < \Delta_{p+1} & < \frac{1}{2}\Delta_p, \\
\frac{1}{2}\Delta_{p+1} & -\frac{1}{8}\Delta_{p+1}^3 & < \Delta_{p+2} & < \frac{1}{2}\Delta_{p+1}, \\
\frac{1}{2}\Delta_{p+2} & -\frac{1}{8}\Delta_{p+2}^3 & < \Delta_{p+3} & < \frac{1}{2}\Delta_{p+2}, \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots, \\
\frac{1}{2}\Delta_{p+n-2} & -\frac{1}{8}\Delta_{p+n-2}^3 & < \Delta_{p+n-1} & < \frac{1}{2}\Delta_{p+n-2}, \\
\frac{1}{2}\Delta_{p+n-1} & -\frac{1}{2}\Delta_{p+n-1} & = \quad 0 & = \frac{1}{2}\Delta_{p+n-1} - \frac{1}{2}\Delta_{p+n-1}.
\end{array}$$

Multiplions les nombres écrits dans chaque ligne horizontale par une puissance de $\frac{1}{2}$ dont l'exposant soit égal au rang de la ligne correspondante, et ajoutons membre à membre ces deux séries d'inégalités; on trouve, en posant, pour abréger,

$$\Sigma = \frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{2^2}\Delta_{p+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n-1}.$$

$$\Sigma' = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^2}\Delta_p^3 + \frac{1}{2^3}\Delta_{p+1}^3 + \ldots + \frac{1}{2^n}\Delta_{p+n-2}^3\right),$$

$$\frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{4}\Sigma - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1} - \Sigma' < \Sigma < \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{4}\Sigma - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1}.$$

Observons actuellement que les termes contenus dans la parenthèse qui donne la valeur de Σ' sont, toujours d'après les inégalités du n° VI, respectivement moindres que les termes de même rang de la progression géométrique décroissante

$$\frac{1}{2^2}\Delta_p^3,\quad \frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2^3}\Delta_p^3,\quad \frac{1}{2^4}\times\frac{1}{(2^2)^3}\Delta_p^3,$$
$$\frac{1}{2^5}\times\frac{1}{(2^3)^3}\Delta_p^3,\quad \ldots,\quad \frac{1}{2^n}\times\frac{1}{(2^{n-2})^3}\Delta_p^3;$$

il en résultera que Σ' est inférieur au $\frac{1}{8}$ de la limite de la somme des termes de cette progression, soit à

$$\frac{1}{8}\Delta_p^3\times\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^4}} = \frac{\Delta_p^3}{2(2^4-1)}.$$

Dès lors, remplaçant Σ' par une quantité plus grande, nous aurons

$$\frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{4}\Sigma - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1} - \frac{\Delta_p^3}{2(2^4-1)}$$
$$< \Sigma < \frac{1}{2}\Delta_p + \frac{1}{4}\Sigma - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1},$$

ou

$$\frac{1}{2}\Delta_p - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1} - \frac{\Delta_p^3}{2(2^4-1)} < \frac{3}{4}\Sigma < \frac{1}{2}\Delta_p - \frac{1}{2^{n+2}}\Delta_{p+n-1}.$$

Ces inégalités, ayant lieu quel que soit n, auront lieu si on le fait croître au de là detoute limite, et comme, dans ces conditions,

$$\lim\Sigma = \Theta - d_p,\qquad \lim\Delta_{p+n-1} = 0,$$

nous trouverons par cette hypothèse

$$\frac{1}{2}\Delta_p - \frac{\Delta_p^3}{2\times(2^4-1)} < \frac{3}{4}(\Theta - d_p) < \frac{1}{2}\Delta_p,$$

d'où

$$d_p + \frac{2}{3}\Delta_p - \frac{2}{3}\,\frac{\Delta_p^3}{15} < \Theta < d_p + \frac{2}{3}\Delta_p.$$

On peut donc accepter comme valeur approchée par excès du diamètre de la circonférence dont la longueur est k

$$d_p + \tfrac{2}{3}\Delta_p,$$

et comme limite de l'erreur commise $\frac{2}{3}\,\frac{\Delta_p^3}{15}$.

XIV. Nous reportant au n° XI, le nombre des côtés du polygone régulier, dont le cercle inscrit admet pour diamètre d_8, est

$$6 \times 2^8 = 1536,$$

nous pouvons donc déduire du numéro précédent que

$$d_8 + \tfrac{2}{3}\Delta_8$$

représente par excès le diamètre de la circonférence dont la longueur est représentée par 1536.

D'après les valeurs numériques trouvées pour d_8 et Δ_8, et tenant compte des erreurs dont elles sont affectées, on trouve dans ce cas particulier

$$\Theta < 488,923985179032;$$

la limite de l'erreur commise sur Θ est

$$\frac{1037}{10^{12}}.$$

Le quotient à moins de $\frac{1}{10^{12}}$ par défaut de 1536 par

$$488,923985179032$$

est

$$3,141592653585.$$

On peut prendre pour limite de l'erreur commise sur le quotient $\frac{3,2 \times 1037}{488,9 \times 10^{12}} < \frac{7}{10^{12}}$, d'où

$$3,141592653585 < \pi < 3,141592653593.$$

3,141592653593 est donc approché de π à moins de $\frac{5}{10^{12}}$ sans qu'on connaisse le sens de l'approximation.

On trouverait $\frac{1}{\pi}$ en divisant Θ par 1536.