NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique en 1886, solution géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 401-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__401_0>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1886;

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne un rectangle ABA′B′. *Deux hyperboles équilatères* (A) *et* (B), *ayant toutes deux leurs asymptotes parallèles aux côtés du rectangle, passent, l'une* (A) *par les sommets opposés* A *et* A′, *l'autre* (B) *par les sommets opposés* B *et* B′ *du rectangle :*

1° *Démontrer que le centre de l'hyperbole* (A) *a, par rapport à l'hyperbole* (B), *la même polaire* P *que le centre de l'hyperbole* (B) *par rapport à l'hyperbole* (A);

2° *Le rectangle restant fixe, on fait varier en même temps les deux hyperboles de manière qu'elles soient égales entre elles, sans être symétriques par rapport à l'un des axes de symétrie du rectangle. Examiner si elles se coupent en des points réels; trouver le lieu du milieu de la droite qui joint leurs centres, et prouver que la droite* P *est constamment tangente à ce lieu.*

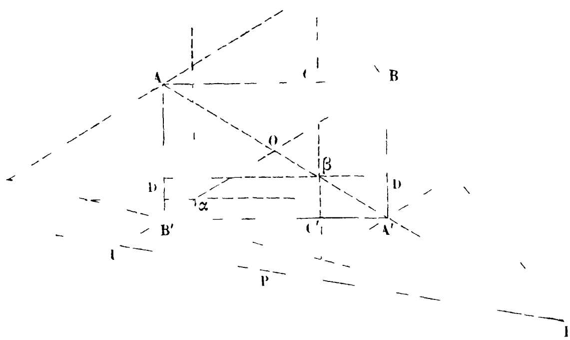
3° *Si l'on prend une quelconque des hyperboles* (A) *et une quelconque des hyperboles* (B), *il existe une infinité de rectangles ayant, comme le rectangle donné, deux sommets opposés sur chacune de ces hyperboles, et les côtés parallèles aux asymptotes. Trouver le lieu des centres de ces rectangles.*

Prenons (*fig.* 1) la parallèle CC′ à BA′ pour l'asymptote d'une hyperbole (B) et cherchons l'autre asymptote de cette courbe. Soit DD′ cette droite. Puisque B et B′ appartiennent à la même hyperbole, on a

$$BC \times BD = B'C' \times B'D'.$$

Il résulte de là que les deux asymptotes se coupent sur AA′. On voit ainsi que : *le centre* β *d'une hyperbole* (B) *est sur la diagonale* AA′; de même : *le centre* α *d'une hyperbole* (A) *est sur la diagonale* BB′.

Fig. 1.



Les tangentes en B et B′ à (B) rencontrent les asymptotes de cette courbe en des points qui sont les symétriques de β par rapport aux côtés du rectangle donné. Joignons ces points par des droites; nous obtenons un trapèze dont les côtés parallèles passent par A et A′ et sont parallèles à BB′. Les côtés non parallèles de ce trapèze se coupent en T sur AA′, qui n'est autre que la droite qui joint les milieux des côtés parallèles du trapèze. *Le point* T *est l'harmonique conjugué de* β *par rapport à* A *et* A′.

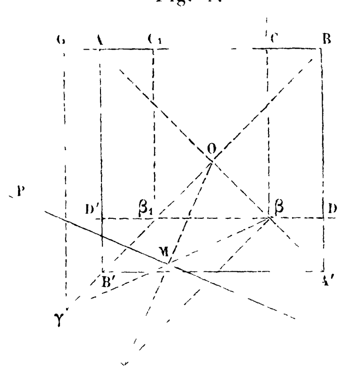
Soit une hyperbole (A) dont le centre est α sur BB′. Cherchons la polaire de ce centre par rapport à (B).

D'abord *cette polaire passe par le point* U, *harmonique conjugué de* α *par rapport aux extrémités de la corde* AA' *de l'hyperbole* (B); ensuite, elle passe par le point de rencontre T des tangentes menées à cette courbe aux extrémités de cette corde. *Cette polaire est donc la droite* UT, *qui passe par les points* U *et* T *harmoniques conjugués de* α *et* β *par rapport aux extrémités des diagonales* BB', AA' *qui contiennent respectivement ces points.*

Il résulte évidemment de là que la polaire P de α par rapport à (B) *est aussi la polaire de* β *par rapport à* (A).

La première partie de la question proposée est ainsi démontrée ([1]).

Fig. 2.



Projetons le rectangle donné suivant un carré (*fig.* 2) et conservons les notations précédentes.

([1]) La première et la dernière partie de la question se résolvent immédiatement, en remarquant que les deux hyperboles sont les projections coniques de deux cercles orthogonaux, et le rectangle AA'BB' la projection de deux diamètres rectangulaires AA', BB' de ces deux cercles. Ch. B.

Appelons γ le centre de l'hyperbole (A), qui est égale à l'hyperbole (B) dont le centre est β. Soient β_1 le point où βD coupe BB' et G le point de rencontre de AB et de l'asymptote de (A) parallèle à AB'.

Puisque les hyperboles, dont les centres sont β et γ, sont égales, on a

$$BC \times BD = \gamma G \times GA$$

ou, en menant $\beta_1 C_1$ parallèlement à BA',

$$\gamma G \times GA = AC_1 \times \beta_1 C_1.$$

De là, comme on le voit facilement,

$$\gamma B \times \gamma B' = \beta_1 B' \times \beta_1 B = \beta A' \times \beta A.$$

Circonscrivons une circonférence au carré ABA'B'. Appelons O le centre de cette courbe et R son rayon, on a

$$\gamma B \times \gamma B' = \overline{\gamma O}^2 - R^2.$$

$$\beta A' \times \beta A = R^2 - \overline{O\beta}^2,$$

par suite

$$\overline{O\gamma}^2 + \overline{O\beta}^2 = 2R^2.$$

Si M est le milieu de $\beta\gamma$, on a aussi

$$\overline{O\gamma}^2 + \overline{O\beta}^2 = 2\overline{OM}^2 + 2\overline{\gamma M}^2.$$

donc

$$\overline{OM}^2 + \overline{\gamma M}^2 = R^2.$$

Mais le triangle $\beta O \gamma$ étant rectangle en O, γM est égal à OM; il vient alors

$$2\overline{OM}^2 = R^2.$$

Le segment OM est donc égal à la moitié du côté du carré. De là résulte que :

Si l'on fait varier en même temps les hyperboles égales (A) *et* (B), *sans qu'elles soient symétriques par rapport à l'un des axes de symétrie du carré, le lieu* *du milieu du segment compris entre leurs centres est la circonférence inscrite au carré donné.*

Il suffit de faire une projection de la figure sur un plan parallèle à l'un des côtés du carré pour trouver, en réponse au commencement de la deuxième partie de l'énoncé proposé, que *le lieu demandé dans cette deuxième partie est l'ellipse inscrite dans le rectangle donné et qui a pour axes les axes de ce rectangle.* Nous désignerons par (E) cette courbe.

Reprenons (*fig.* 2) le carré $ABA'B'$. Puisque OM est de longueur constante, il en est de même de $\beta\gamma$. Ainsi :

La distance des centres de deux hyperboles égales, non symétriques par rapport à l'un des axes du carré, est constante et égale au côté du carré.

Cette propriété conduit à celle-ci :

La distance des centres de deux hyperboles égales, non symétriques par rapport à l'un des axes du rectangle donné, est égale au diamètre de (E) *qui lui est parallèle.*

Construisons (*fig.* 2) le rectangle $O\beta I\gamma$. Deux autres hyperboles égales conduisent à un rectangle analogue à celui-ci. Comme les diagonales de ces rectangles sont égales au côté du carré, *les points tels que* I *appartiennent à une circonférence décrite du point* O *comme centre avec le côté du carré pour rayon.*

Nous avons trouvé précédemment

$$2\overline{OM}^2 = R^2;$$

il résulte de là que : *la polaire réciproque de cette circonférence par rapport à la circonférence circonscrite au carré donné est la circonférence inscrite à ce carré.*

La polaire de I, par rapport à la circonférence circonscrite au carré, est alors une tangente à la circonférence inscrite. Mais cette polaire joint le pôle de $I\beta$ à celui de $I\gamma$: c'est alors la droite P qui joint les harmoniques conjugués de β et γ par rapport aux extrémités des diagonales AA′, BB′ qui contiennent respectivement ces centres. Ainsi :

La droite P *est tangente à la circonférence inscrite au carré donné.*

Au moyen d'une projection sur un plan parallèle à l'un des côtés du carré, on a la réponse à une partie du deuxième alinéa de l'énoncé de la question proposée.

Les hyperboles égales, dont les centres sont β et γ, ont leurs asymptotes parallèles et peuvent être amenées en coïncidence au moyen de la translation de l'une parallèlement à la droite $\beta\gamma$. Ces hyperboles interceptent alors sur cette droite des diamètres égaux et par suite la polaire P passe par le point M milieu du segment $\beta\gamma$. Ainsi :

Dans le cas de deux hyperboles égales, la polaire P *est tangente en* M *à la circonférence inscrite au carré donné* [1].

Appelons d le demi-diamètre intercepté par l'une des hyperboles sur la droite $\beta\gamma$. On a

$$\beta\gamma \times \beta M = d^2$$

ou

$$2\overline{\beta M}^2 = d^2.$$

---

[1] En faisant une projection de la figure sur un plan parallèle à l'un des côtés du carré, on trouve que cette propriété est vraie dans le cas où l'on a un rectangle dans l'énoncé de la question.

Il est facile de voir directement que la droite qui joint le point M au point conjugué harmonique de γ, par rapport à BB′, est perpendiculaire à OM.

Donc, d'après ce qui précède :

Le diamètre intercepté par l'une des hyperboles sur la droite $\beta\gamma$ *est égal à la diagonale du carré donné.*

Le demi-diamètre d est alors plus grand que βM et *la droite* P *ne rencontre pas les hyperboles dont les centres sont* β *et* γ.

Puisque la droite P passe par le milieu M de $\beta\gamma$, les hyperboles la rencontrent aux mêmes points imaginaires; *la droite* P *est alors une corde commune aux hyperboles dont les centres sont* β *et* γ *et les points de rencontre de ces hyperboles sur cette droite sont imaginaires.*

En faisant une projection de la figure sur un plan parallèle à l'un des côtés du carré, on est conduit à la réponse relative à la dernière partie du deuxième alinéa qui restait à trouver.

Supposons que, par le point fixe β, on mène des cordes de l'hyperbole fixe (A) dont le centre est α (*fig.* 1). Sur chacune de ces cordes on construit un rectangle dont les côtés sont parallèles aux asymptotes de cette courbe. Les diagonales de ces rectangles sont les cordes que nous venons de mener et, d'après ce que nous avons démontré au commencement de cette solution, des droites qui passent par le centre α. Les centres de ces rectangles appartiennent à une courbe (O) lieu des milieux des cordes interceptées par (A) sur les droites qui passent par le point fixe β; *cette courbe* (O) *est alors une hyperbole équilatère dont le centre est au milieu de* $\alpha\beta$ *et dont les asymptotes sont parallèles aux asymptotes de* (A).

Le lieu des sommets B, B′ de ces rectangles est une conique : car sur une droite telle que BB′, qui passe toujours par α, il n'y a que les deux points B, B′ qui appartiennent à ce lieu, le point α n'en faisant pas partie. Par rapport à cette conique l'hyperbole (O) est le lieu des milieux des cordes, telles que B, B', qui passent par α : donc *la conique lieu des points* BB' *est une hyperbole équilatère* (B) *dont le centre est* β *et dont les asymptotes sont parallèles aux côtés des rectangles.*

On voit donc qu'*il existe une infinité de rectangles ayant, comme le rectangle donné, deux sommets opposés sur chacune des hyperboles* (A) *et* (B) *et les côtés parallèles aux asymptotes de ces courbes et que les centres de ces rectangles sont sur une hyperbole équilatère dont le centre est au milieu de la droite des centres de* (A) *et* (B) *et dont les asymptotes sont parallèles aux asymptotes de ces hyperboles.*

Nous avons ainsi achevé de répondre à toutes les parties de la question proposée.

Il y a encore quelques remarques à faire, mais chacun les trouvera facilement.