NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. DU CHATENET

Étude sur les paris de courses (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 380-395

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__380_1>

ÉTUDE SUR LES PARIS DE COURSES

[SUITE (1)];

PAR M. M. DU CHATENET.

VI. — *Paris sur le premier et le second.*

Le pari suivant se fait assez souvent, surtout dans les courses importantes. Le preneur parie que tel cheval qu'il désigne arrivera premier et que tel autre sera second.

Il est facile de calculer la probabilité pour que ces

(1) *Voir* même Tome, p. 327.

deux événements s'accomplissent. Ce sera le produit des probabilités de chacun d'eux pris isolément. La probabilité du cheval coté a d'arriver premier est

$$\frac{1}{a+1}.$$

Celle du cheval coté b d'arriver second, étant donné que l'autre arrive premier, sera, comme on a vu,

$$\frac{\dfrac{1}{b+1}}{1+M-\dfrac{1}{a+1}}.$$

La probabilité cherchée sera donc, en appelant n la cote du pari,

$$(15) \qquad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a+1}\,\frac{1}{b+1}\,\frac{1}{1+M-\dfrac{1}{a+1}}.$$

Pour faire un livre complet, il faudrait prendre ou donner toutes les combinaisons possibles que l'on peut imaginer sur l'arrivée des deux premiers chevaux. S'il y a m chevaux prenant part à la course, il y aura $m(m-1)$ cas qui pourront se présenter. On peut vérifier que la somme de toutes ces probabilités donne $1+M$, c'est-à-dire que le chargement ou déchargement correspondant à l'opération reste le même. Il faut en conclure que, le nombre de combinaisons augmentant très rapidement avec le nombre de chevaux et étant toujours très supérieur à ce nombre, l'opération sera moins avantageuse que le pari ordinaire, car il sera pratiquement impossible de faire un livre complet. Ce genre de pari ne saurait donc être destiné à amener un bénéfice assuré; on ne doit y chercher qu'un gain aléatoire en fixant une cote qui paraisse favorable, ou un moyen de réaliser un arbitrage, comme nous le verrons plus loin.

Prenons l'exemple précédent de trois chevaux A, B, C cotés 1, $1\frac{1}{2}$, 4 avec un chargement de 0,10. Les probabilités qui correspondent aux cas AB, AC, BA, BC, CA, CB seront

0,333, 0,167, 0,286, 0,115, 0,110, 0,089,

et les cotes des paris devront être, à très peu près,

2, 5, $2\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, 8, 9.

Il y a une autre manière de comprendre et d'effectuer le pari sur les deux premiers chevaux d'une course. On peut parier que deux chevaux désignés seront tous les deux dans les deux premiers, mais sans assigner, comme précédemment, la place précise de chacun d'eux. La solution de cette question est la conséquence de ce que nous venons de voir. En effet, les deux chevaux, A et B par exemple, pourront arriver dans l'ordre AB et BA. La probabilité cherchée sera donc la somme des probabilités de ces deux événements

$$(16)\qquad \frac{1}{n'+1}=\frac{1}{a+1}\,\frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1+M-\frac{1}{a+1}}+\frac{1}{1+M-\frac{1}{b+1}}\right).$$

Le nombre des cas qui pourront se présenter sera alors

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

Dans l'exemple numérique précédent, les probabilités qui corrèspondent aux cas AB, BC, CA seront

0,619, 0,204, 0,277,

et les cotes, à peu près,

3, 4, $3\frac{1}{2}$.

VII. — *Paris sur les places relatives.*

Au lieu de parier sur le cheval qui doit arriver premier parmi tous ceux qui sont engagés dans une course, nous pouvons n'en considérer qu'une partie et parier sur celui qui arrivera le premier du groupe en question.

Par exemple, dans une course où doivent figurer les chevaux A, B, C, D, E, F, G, H, ne considérons que les chevaux A, B, C, D; nous parierons que l'un d'eux, A, arrivera avant les autres, B, C, D.

Disons de suite que, dans un tel pari, il sera toujours bon de stipuler qu'il n'aura de valeur que si le cheval désigné est placé dans les deux ou trois premiers. En effet, les chevaux qui, pendant la première partie de la course, s'aperçoivent qu'ils ne peuvent obtenir une place entraînant un prix, abandonnent la lutte et ne cherchent plus à devancer ceux qui les précèdent.

Cette question a déjà été incidemment traitée. La probabilité pour que le cheval A arrive avant B, C, D sera, d'après ce qui a été dit,

$$\frac{\dfrac{1}{a+1}}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}+\dfrac{1}{d+1}}.$$

La somme de toutes les probabilités analogues serait égale à l'unité. Il serait donc impossible de faire un livre; mais on y arrivera en augmentant ou diminuant un peu les valeurs trouvées pour toutes ces cotes.

VIII. — *Paris sur une partie des chevaux.*

Nous avons examiné le pari qui consiste à prendre ou donner un cheval placé. Dans ce cas, on désigne plusieurs places pour un même cheval. Nous pouvons renverser la question et désigner un groupe de chevaux pour une même place. Par exemple, dans une course où doivent courir les chevaux A, B, C, D, E, F, prenons seulement les chevaux A, B, C et parions que l'un d'entre eux, sans fixer lequel, arrivera premier.

Cherchons la probabilité qu'a le groupe de chevaux considéré de fournir le gagnant. Ce sera la somme des probabilités de chaque cheval pris isolément, ou

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}.$$

Dans une course où il y a m chevaux engagés, si on les groupe n par n, on pourra faire sur eux

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n-1)}{1.2.3\ldots n}$$

paris différents.

Au lieu de parier que l'un des chevaux du groupe arrivera premier, on peut parier qu'il sera second. La probabilité sera alors

$$\frac{1}{a'+1}+\frac{1}{b'+1}+\frac{1}{c'+1}$$

ou, en fonction des cotes de premier,

$$\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\sum\frac{\dfrac{1}{a+1}}{1+M-\dfrac{1}{a+1}}$$

$$-\left[\frac{\dfrac{1}{(a+1)^2}}{1+M-\dfrac{1}{a+1}}+\frac{\dfrac{1}{(b+1)^2}}{1+M-\dfrac{1}{b+1}}+\frac{\dfrac{1}{(c+1)^2}}{1+M-\dfrac{1}{c+1}}\right].$$

Soit une course où cinq chevaux sont engagés avec les cotes 1, 3, 4, 7, 9, correspondant à un chargement de 0,175. Supposons que nous groupions ensemble les chevaux cotés 1, 4, 9. La probabilité, pour que l'un d'eux arrive premier, sera

$$0,8,$$

et la cote du pari

$$\tfrac{1}{4}.$$

Si l'on parie que les chevaux déjà cités fourniront le second de la course, la probabilité est

$$0,7.$$

et la cote du pari serait

$$\tfrac{9}{20}.$$

On peut, enfin, parier qu'un groupe de trois chevaux, par exemple, aura un cheval placé dans les deux premiers. La probabilité sera la somme des probabilités de premier et de second de tous les chevaux, c'est-à-dire

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{a'+1}+\frac{1}{b'+1}+\frac{1}{c'+1},$$

c'est-à-dire la somme des probabilités des deux cas précédents.

Dans l'exemple numérique choisi, la probabilité serait

$$1,50,$$

ce qui est absurde; mais ce fait est dû à l'influence du chargement qui ne permet plus d'accepter un pareil pari.

IX. — *Paris sur plusieurs courses.*

Nous avons examiné les principales espèces de paris que l'on peut se proposer sur une course. On peut les augmenter d'une façon presque indéfinie de la manière suivante. Étant données plusieurs courses à venir, si l'on connaît les chevaux qui y prendront part, on peut faire sur chacune d'elles les paris que nous avons étudiés, et lier ensemble tous ces paris, de manière que, pour avoir gagné définitivement, il faut avoir gagné isolément chacun d'eux.

Par exemple, sur une série de trois courses, on pourra désigner le premier de l'une, le premier et le second de l'autre, et désigner un cheval placé dans la troisième. Il faudra gagner chacun de ces trois paris pour gagner le pari proposé.

Soient $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ le nombre de paris que l'on peut faire sur chacune des n courses formant une série. On pourra, sur l'ensemble, faire $q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$ paris.

L'analyse de tous les cas qui peuvent se présenter comme combinaisons de paris sur plusieurs courses est toujours très simple. La probabilité cherchée sera le produit de toutes les probabilités élémentaires. On en déduira la cote correspondant au pari.

La combinaison la plus fréquente est celle qui consiste à désigner le premier dans une série de courses. Si les chevaux indiqués ont pour cotes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans chaque course prise isolément, la probabilité de l'événement complexe sera

$$\frac{1}{a_1+1}\,\frac{1}{a_2+1}\cdots\frac{1}{a_n+1}.$$

S'il fallait désigner le premier et le second dans chacune des n courses, la probabilité serait

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1+1}\,\frac{1}{a_2+1}\cdots\frac{1}{a_n+1}\,\frac{1}{b_1+1}\,\frac{1}{b_2+1}\cdots\frac{1}{b_n+1}\\ &\times\frac{1}{1+M-\dfrac{1}{a_1+1}}\,\frac{1}{1+M-\dfrac{1}{a_2+1}}\cdots\frac{1}{1+M-\dfrac{1}{a_n+1}}.\end{aligned}$$

On peut aussi, dans une série de plusieurs courses, ne considérer qu'un seul cheval engagé dans toutes et sur lequel porteront les diverses combinaisons qu'on peut se proposer.

Si un cheval est engagé dans deux courses, la probabilité pour qu'il gagne l'une des deux courses, sans préciser laquelle, sera

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}.$$

S'il est engagé dans trois courses, la probabilité, pour qu'il en gagne une, sera

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\frac{1}{a_3+1}.$$

La probabilité, pour qu'il en gagne deux sur les trois, sans préciser lesquelles, sera

$$\frac{1}{a_1+1}\,\frac{1}{a_2+1}+\frac{1}{a_2+1}\,\frac{1}{a_3+1}+\frac{1}{a_3+1}\,\frac{1}{a_1+1}.$$

X. — *Poule.*

La poule est un mode de pari qui diffère complètement de ceux dont nous avons parlé, en ce qu'il ne repose en rien sur l'appréciation des chevaux et que tout y est livré au hasard.

Soit une course où n chevaux sont engagés; n personnes se réunissent et, après avoir fixé un enjeu commun, tirent au sort les noms des n chevaux. Le parieur à qui est échu le nom du cheval qui arrive premier gagne la poule, c'est-à-dire la somme des n enjeux. Les anciennes agences qui servaient d'intermédiaires entre les diverses personnes participant à une poule prélevaient une commission α par franc, de sorte que, si l'on nommait Q l'enjeu commun, le gagnant ne touchait réellement que

$$n(1-\alpha)Q,$$

et son bénéfice net était

$$(n-1-\alpha n)Q.$$

Avant de tirer les chevaux au sort, tous les parieurs se trouvent exactement dans les mêmes conditions, et les enjeux doivent bien être égaux; mais, quand chacun connaît le cheval qui lui est échu, la situation est changée, et les chances des divers joueurs ne sont plus les mêmes. Voyons dans quel cas on aura été favorisé par la poule. Soit a la cote du cheval que l'on a obtenu. On a donc, pour gagner la probabilité,

$$\frac{1}{a+1}.$$

Avant le tirage, on avait la probabilité

$$\frac{1}{n};$$

il faudra donc, pour retirer un avantage de la poule, la condition

$$n > a+1.$$

On peut convenir, dans une poule, que le parieur qui aura le cheval arrivant second aura droit à une fraction K de la somme des enjeux. Dans ce cas, le premier gagnant touchera donc

$$n(1-K)Q,$$

et le second

$$KnQ.$$

Avant le tirage, la probabilité des joueurs de voir son cheval placé dans les deux premiers est

$$\frac{2}{n};$$

après le tirage, si a et a' représentent les cotes de premier et de second du cheval obtenu, la probabilité sera

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a'+1}.$$

Pour que la poule ait produit un avantage, il faudra donc la condition

$$\frac{2}{n} < \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a'+1}$$

ou

$$\frac{2(a+1)}{n} < 1 + \sum \frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}} - \frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}}.$$

L'usage ne s'est pas introduit de faire des poules contre les chevaux, c'est-à-dire celles où le joueur à qui est échu le cheval qui arrive a seul perdu et où les autres se partagent son enjeu. Dans ce cas, la probabilité de chaque parieur est le complément de celle qu'il aurait dans la poule ordinaire ; il faudra donc, pour avoir retiré un avantage du tirage, la condition

$$n < a+1.$$

La somme à toucher, toujours petite puisque la probabilité de gagner est grande, sera

$$\frac{n}{n-1} Q.$$

XI. — *Paris mutuels.*

Les paris mutuels, aujourd'hui prohibés en France, s'effectuent comme il suit. Une agence reçoit de chaque personne désirant parier sur une course une mise uniforme, soit 1^{fr}, placée sur un cheval déterminé. Après la course, toutes les mises sont réparties entre les parieurs qui ont placé leurs enjeux sur le cheval gagnant. Dans ce mode d'opérer, c'est bien le public qui parie contre lui-même, d'où le nom de *pari mutuel*. L'agence qui organise l'opération n'agit que comme intermédiaire, et, à ce titre, elle prélève une commission α sur tous les enjeux; par conséquent, la somme P à distribuer entre les personnes qui ont parié pour le gagnant ne sera plus que

$$P(1-\alpha).$$

Soient A, B, C, ... le nombre de mises de 1^fr placées sur les divers chevaux d'une même course. Si c'est le cheval portant la somme A qui gagne, chaque parieur gagnant recevra la somme

$$\frac{P}{A}(1-\alpha),$$

ce qui constituera pour lui un bénéfice

$$\frac{P}{A}(1-\alpha)-1.$$

On voit que, en définitive, les paris mutuels ressemblent beaucoup aux paris à la cote; mais, dans ce cas, c'est le public qui détermine lui-même la cote et qui la fait varier à chaque instant, en se portant sur un cheval plutôt que sur un autre. Si nous appelons a la cote résultant des sommes engagées sur le cheval portant les paris A et sur les autres, on aura

$$a+1=\frac{P}{A}(1-\alpha). \tag{17}$$

Puisque les paris mutuels peuvent être assimilés aux paris à la cote et que l'agence prélève une commission sur les sommes qu'elle reçoit, il est évident que le public ne se trouve pas dans les conditions d'un pari strictement équitable, et que sa position est tout à fait analogue à celle qu'il a quand il parie contre une agence dont la cote présente un chargement. Il est donc intéressant de savoir à quel chargement M correspond la commission α prélevée par l'intermédiaire.

Pour résoudre cette question, il suffira de faire la somme $\sum \frac{1}{a+1}$, en remplaçant $a, b, c, \ldots$ par les cotes qui résultent de l'ensemble des paris d'après (17); on trouvera ainsi

$$\sum \frac{1}{a+1} = 1 + M = \frac{1}{1-\alpha},$$

d'où

$$M = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Une commission de 8 pour 100 équivaut à un chargement de 0,087; une commission de 12 pour 100 à un chargement de 0,136.

De même que pour les poules, l'usage ne s'est guère introduit de faire des paris mutuels contre les chevaux, c'est-à-dire ceux où le joueur a perdu quand le cheval qui arrive est celui contre lequel il avait parié. Les joueurs qui avaient parié contre tous les autres chevaux se répartissent les enjeux perdus. Cette répartition peut se faire de plusieurs manières : par personne ou par cheval.

Dans le premier cas, les mises placées contre le cheval qui est arrivé sont distribuées également entre tous les autres joueurs. Le bénéfice sera donc

$$\frac{A}{P-A},$$

et la somme totale retirée, y compris l'enjeu, sera

$$\frac{P}{P-A}.$$

Dans le second cas, les mises placées contre le cheval qui est arrivé sont distribuées par parties égales entre tous les autres chevaux, et la partie qui correspond à chaque cheval sera distribuée également entre les joueurs qui ont parié contre lui. Si le cheval contre lequel on a parié A arrive premier, les personnes qui auront toutes réunies parié B contre un autre recevront comme bénéfice

$$\frac{A}{(n-1)B},$$

n étant le nombre des chevaux.

Ce second système est assurément le plus rationnel et le plus équitable. En effet, dans le premier, tous les parieurs reçoivent le même bénéfice; par conséquent, tous les paris devront se porter contre les chevaux notoirement connus comme incapables d'arriver. Il y a tout lieu de croire que les chevaux à faible cote ne porteront aucun pari et que, s'ils arrivent, l'opération devra être annulée. Le second mode a l'avantage de rémunérer plus justement les paris faits contre des chevaux réputés gagnants probables, car la masse du public ne se portera pas contre eux; il encourage donc les parieurs, par l'espoir d'un gain plus grand, à étudier avec plus de soin les probabilités de chacun des chevaux.

XII. — *Arbitrages simples.*

Nous avons vu comment le preneur et le donneur de chevaux pouvaient, avec un livre bien fait, s'assurer un bénéfice certain, quel que soit le résultat de la course. On peut encore, au moyen d'arbitrages faits dans des conditions déterminées, obtenir un bénéfice certain, tout en ne pariant que sur un petit nombre de chevaux et même sur un seul. Il y aura un arbitrage toutes les fois qu'après avoir fait un ou plusieurs paris on pourra les défaire au moyen d'un ou plusieurs autres paris, tout en se laissant un bénéfice assuré. Cette manière d'opérer consiste, pour ainsi dire, à acheter une valeur pour la vendre ou à la vendre pour la racheter dans des conditions plus avantageuses. En fait, il est bien plus facile de prendre des chevaux que de les donner; on devra donc, pour rendre un arbitrage probable, trouver d'abord un preneur; on pourra presque toujours trouver un donneur.

Le cas le plus simple des arbitrages de courses consiste à faire un pari et à le détruire par le pari contraire.

Soit q la somme qu'on acceptera de la contre-partie en donnant un pari. Si l'on perd le pari, la perte sera

$$q\psi,$$

ψ étant une fonction des cotes des chevaux qui dépendra de la nature du pari en question. Soit p la somme qu'on expose en prenant un pari; si on le gagne, le bénéfice sera

$$p\varphi,$$

φ étant une autre fonction des cotes.

Si les deux paris peuvent former un arbitrage, voyons quels doivent être les enjeux p et q pour obtenir des bénéfices déterminés A et B suivant le pari qu'on gagnera.

Si l'on gagne le premier pari, on aura gagné q; mais, dans ce cas, on perdra le second, et de ce chef on perdra p. Pour obtenir, quand même, un bénéfice A, il faudra avoir la relation

$$q-p=\mathrm{A}.$$

Si l'on perd le premier pari, on perdra $q\psi$; mais alors on gagnera le second, et de ce chef on gagnera $p\varphi$. Pour réaliser ainsi un bénéfice B, on devra avoir la relation

$$p\varphi-q\psi=\mathrm{B}.$$

Ces deux équations nous permettent de trouver la valeur des enjeux. Nous aurons, en effet,

$$(18)\qquad p=\frac{\mathrm{A}\psi+\mathrm{B}}{\varphi-\psi},\qquad q=\frac{\mathrm{A}\varphi+\mathrm{B}}{\varphi-\psi}.$$

On voit immédiatement que, pour que ces valeurs soient positives, c'est-à-dire pour qu'elles fournissent une solution au problème, il faut qu'on ait $\varphi > \psi$.

Comme cas particulier des formules (18), si l'on veut, en tout cas, obtenir le même bénéfice, il suffira de faire

$$A = B,$$

et les valeurs des enjeux seront

$$(19)\qquad p = \frac{A(\psi+1)}{\varphi-\psi},\qquad q = \frac{A(\varphi+1)}{\varphi-\psi}.$$

Si l'on veut se couvrir sur l'un des paris en cherchant un bénéfice sur l'autre, les formules seront

$$(20)\qquad p = \frac{A\psi}{\varphi-\psi},\qquad q = \frac{A\varphi}{\varphi-\psi},$$

$$(21)\qquad p = \frac{B}{\varphi-\psi},\qquad q = \frac{B}{\varphi-\psi}.$$

On doit commencer, avons-nous dit, par donner un pari; il suffira donc de connaître le rapport $\frac{p}{q}$ pour en déduire la valeur de p. On aura donc, d'après (19),

$$(22)\qquad \frac{p}{q} = \frac{A\psi+B}{A\varphi+B}.$$

Si l'on avait $\varphi < \psi$, l'arbitrage serait impossible, tel que nous l'avons indiqué; mais on pourrait en faire un autre en donnant le pari qu'on a pris et en prenant le pari qu'on a donné. Les équations du problème deviendraient

$$p - q = A \qquad \text{et} \qquad q\psi - p\varphi = B.$$

Elles ne diffèrent des précédentes que par le changement de signe de p et q. La solution serait donc

$$(23)\qquad p = \frac{A\psi+B}{\psi-\varphi},\qquad q = \frac{A\varphi+B}{\psi-\varphi}.$$

Appliquons cette théorie à un exemple particulier. Supposons qu'on donne un cheval à la cote a et qu'on le prenne à la cote b. La solution sera fournie par les formules (18), en faisant $\psi = a$, $\varphi = b$; on aura

$$(24)\quad p = \frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}}{b - a}, \qquad q = \frac{\mathrm{A}b + \mathrm{B}}{b - a}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}}{\mathrm{A}b + \mathrm{B}}$$

ou, si l'on veut un bénéfice uniforme A,

$$(25)\quad p = \frac{\mathrm{A}(a + 1)}{b - a}, \qquad q = \frac{\mathrm{A}(b + 1)}{b - a}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{a + 1}{b + 1}.$$

Pour que l'arbitrage soit possible, il faudra donc pouvoir donner le cheval à une cote plus faible que celle à laquelle on l'a pris.

Si l'on veut simplement se couvrir sur le pari coté b et gagner A sur le pari coté a, on aura

$$(26)\qquad p = \frac{\mathrm{A}a}{b - a}, \qquad q = \frac{\mathrm{A}b}{b - a}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{a}{b}$$

Si l'on veut faire l'opération inverse, on aura

$$(27)\qquad p = \frac{\mathrm{B}}{b - a}, \qquad q = \frac{\mathrm{B}}{b - a}.$$

Faisons une application numérique de ce qui précède. On a donné un cheval à la cote 2 pour une somme de 900^{fr}, et l'on trouve plus tard à prendre ce même cheval à la cote $2\frac{1}{2}$. Si l'on veut gagner 100^{fr} s'il n'arrive pas et 200^{fr} s'il arrive, on pariera 800^{fr} pour lui.

Si l'on veut gagner la même somme dans les deux cas, on pariera 771^{fr} pour le cheval, et le bénéfice sera 128^{fr}.

Inutile d'ajouter que tout ce qui a été dit serait également vrai si, au lieu de parier sur des chevaux devant arriver premiers, on faisait des paris sur des chevaux seconds ou placés, etc. (*A suivre.*)