NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. MOLLAME

Sur les sommes des produits $kAk(k = 1, 2, 3, \cdots)$ des nombres naturels

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 364-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__364_1>

SUR LES SOMMES DES PRODUITS k A k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) DES NOMBRES NATURELS;

PAR M. V. MOLLAME,
Professeur à l'Université de Catane (Sicile).

Soit $S_{k,n}$ la somme de tous les produits k à k des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. On aura

$$S_{k,n} = 0, \qquad \text{si} \qquad k > n,$$

et

$$S_{k,n} = n!, \qquad \text{si} \qquad k = n.$$

Faisons, par convention,

$$S_{0,0} = 1, \qquad S_{0,n} = 1. \qquad S_{0,-1} = 1.$$

Cela posé, si n, r, μ, ω sont des nombres entiers positifs, et a, b deux nombres quelconques, on aura la relation

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a+b)^{n-\omega} S_{\omega,n-1} \\ &\quad = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu,r-1} S_{\omega-\mu,n-r-1}\, a^{r-\mu} b^{n-\omega-(r-\mu)}. \end{aligned} \right.$$

On sait, en effet, que, en posant

$$1 + \frac{a}{1} x + \frac{a(a+k)}{2!} x^2 + \frac{a(a+k)(a+2k)}{3!} x^3 + \ldots \\ + \frac{a(a+k)\ldots[a+(m-1)k]}{m!} x^m = \varphi(a),$$

où m est un nombre entier, aussi grand qu'on veut, on a

$$\varphi(a)\,\varphi(b) = \varphi(a+b),$$

et, pour cela, si l'on désigne par A_r, B_s, C_n, respectivement, les coefficients de x^r, x^s, x^n dans $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(a+b)$, on aura

$$(\alpha)\qquad C_n = \Sigma A_r B_s \quad \left\{ \begin{matrix} r = 0, 1, 2, \ldots, n \\ s = n, n-1, n-2, \ldots, 0 \end{matrix} \right\}.$$

Cependant on a

$$A_r = \frac{1}{r!} a(a+k)(a+2k)\ldots[a+(r-1)k],$$

c'est-à-dire

$$A_r = \frac{1}{r!}(S_{0,r-1} a^r + S_{1,r-1} a^{r-1} k \\ + S_{2,r-1} a^{r-2} k^2 + \ldots + S_{r-1,r-1} a k^{r-1})$$

et, pareillement,

$$B_s = \frac{1}{s!}(S_{0,s-1} b^s + S_{1,s-1} b^{s-1} k \\ + S_{2,s-1} b^{s-2} k^2 + \ldots + S_{s-1,s-1} b k^{s-1}),$$

$$(\beta)\quad \left\{ \begin{aligned} C_n = \frac{1}{n!}[&S_{0,n-1}(a+b)^n \\ &+ S_{1,n-1}(a+b)^{n-1} k + \ldots + S_{n-1,n-1}(a+b) k^{n-1}]. \end{aligned} \right.$$

Le terme de A_r qui contient k^μ et celui de B_s qui contient k^ν sont, respectivement,

$$\frac{1}{r!}\,S_{\mu,r-1}\,a^{r-\mu}k^{\mu}, \qquad \frac{1}{s!}\,S_{\nu,s-1}\,b^{s-\nu}k^{\nu},$$

et, pour cela, le terme avec $k^{\mu+\nu}$ dans A_rB_s est

$$\frac{1}{r!\,s!}\,S_{\mu,r-1}\,S_{\nu,s-1}\,a^{r-\mu}b^{s-\nu}k^{\mu+\nu};$$

donc, en posant $\mu+\nu=\omega$,

$$\sum\frac{1}{r!\,s!}\,S_{\mu,r-1}\,S_{\nu,s-1}\,a^{r-\mu}b^{s-\nu} \quad \begin{Bmatrix} r=0,1,2,\ldots,\omega \\ s=\omega,\omega-1,\omega-2,\ldots,0 \end{Bmatrix}$$

sera le coefficient de k^ω dans A_rB_s; on peut l'écrire encore

$$\frac{1}{r!\,s!}\sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu,r-1}\,S_{\omega-\mu,s-1}\,a^{r-\mu}b^{s-\omega+\mu},$$

et, pour cela, le coefficient de k^ω dans C_n sera, à l'aide de l'égalité (α),

$$\sum\frac{1}{r!\,s!}\sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu,r-1}\,S_{\omega-\mu,s-1}\,a^{r-\mu}b^{s-\omega+\mu}$$

$$(r=0,1,2,\ldots,n;\ s=n,n-1,n-2,\ldots,0)$$

ou, étant $s=n-r$ et $\dfrac{1}{r!\,(n-r)!}=\dbinom{n}{r}\dfrac{1}{n!}$,

$$\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{r=n}\binom{n}{r}\sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} S_{\mu,r-1}\,S_{\omega-\mu,s-1}\,a^{r-\mu}b^{n-\omega-(r-\mu)}.$$

Mais le coefficient de k^ω dans C_n est, en vertu de l'égalité (β),

$$\frac{1}{n!}\,S_{\omega,n-1}(a+b)^{n-\omega};$$

on a donc la relation (1), par suite de l'égalité des deux expressions du coefficient de k^ω.

Si $\omega = 0$, l'égalité (1) donne le théorème du binôme pour un exposant entier et positif.

2. On a aussi

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\binom{n-\omega+1}{p} S_{\omega,n} \\
&\quad = \binom{n+1}{p} S_{0,p-1} S_{\omega,n-p} - \binom{n+1}{p+1} S_{1,p} S_{\omega-1,n-p-1} \\
&\qquad + \binom{n+1}{p+2} S_{2,p+1} S_{\omega-2,n-p-2} + \ldots - \binom{n+1}{\omega+p} S_{\omega,p+\omega-1} S_{0,n-p-\omega},
\end{aligned}
\right.
$$

c'est-à-dire

$$
(2') \quad \binom{n-\omega+1}{p} S_{\omega,n} = \sum_{r=0}^{r=\omega} \binom{n+1}{p+r} S_{r,p+r-1} S_{\omega-r,n-p-r}.
$$

En effet, si l'on pose, dans l'équation (1), $r - \mu = p$ et que l'on prenne, dans le second signe Σ, le terme qui résulte lorsque $\mu = r - p$,

$$
\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} S_{r-p,r-1} S_{\omega-r+p,n-r-1} a^p b^{n-\omega-p}
$$

sera la partie du second membre de l'équation (1) où figure $a^p b^{n-\omega-p}$. Dans la précédente expression, la valeur la plus petite que peut recevoir r dans $S_{r-p,r-1}$, c'est $r = p$. La valeur la plus grande que la même quantité r peut avoir dans $S_{\omega-r-p,n-r-1}$, c'est $r = \omega - p$, de manière que

$$
\sum_{r=p}^{r=\omega+p} \binom{n}{r} S_{r-p,r-1} S_{\omega-r-p,n-r-1}
$$

sera le coefficient de $a^p b^{n-\omega-p}$ dans le second membre de l'équation (1); mais le coefficient de $a^p b^{n-\omega-p}$ donné par le premier membre de la même égalité, c'est

$\binom{n-\omega}{p} S_{\omega,n-1}$: donc

$$\binom{n-\omega}{p} S_{\omega,n-1} = \sum_{r=p}^{r=\omega+p} \binom{n}{r} S_{r-p,r-1} S_{\omega-r+p,n-r-1},$$

et, si l'on change, dans cette dernière égalité, n en $n+1$ et r en $r+p$, on aura l'équation ($2'$).

On a encore

$$(3) \quad \begin{cases} (n-k+1)S_{k,n} \\ \quad = \displaystyle\sum_{r=0}^{r=k} \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+1)}{n+1} S_{k-r,n-r-1}, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(3') \quad \begin{cases} (n-k+1)S_{k,n} \\ \quad = \dfrac{n+1}{1} S_{k,n-1} + \dfrac{(n+1)n}{2} S_{k-1,n-2} \\ \quad\quad + \dfrac{(n+1)n(n-1)}{3} S_{k-2,n-3} + \ldots \\ \quad\quad + \dfrac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k+1} S_{0,n-k-1}. \end{cases}$$

On obtient l'égalité précédente par le changement de k en ω dans l'équation (2) : dans celle-ci, on fera $p=1$, et l'on se rappellera que

$$S_{r,r} = 1$$

et que

$$\binom{n+1}{r+1} r! = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r+1}.$$

On a pareillement

$$(4) \quad \begin{cases} S_{k,n} = nS_{k-1,n-1} + (n-1)S_{k-1,n-2} \\ \quad\quad\quad + (n-2)S_{k-1,n-3} + \ldots + kS_{k-1,n-1}. \end{cases}$$

En effet, dans $S_{k,n}$, il y a des produits qui ont le facteur n. Ce sont ceux qui ont pour somme $nS_{k-1,n-1}$; les autres produits n'ont pas le facteur n et donnent pour somme $S_{k,n-1}$, de sorte que l'on a

(5) $$S_{k,n} = n S_{k-1,n-1} + S_{k,n-1}.$$

L'équation (4) est une conséquence immédiate de l'équation (5).

Si, dans l'équation (3'), on introduit la valeur de $S_{k,n-1}$ donnée par l'équation (5), on aura

$$\begin{aligned} k S_{k,n} = n(n+1) S_{k-1,n-1} & \\ - \Bigg[& \frac{(n+1)n}{2} S_{k-1,n-2} \\ & + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} S_{k-2,n-3} + \ldots \\ & + \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k+1} S_{0,n-k+1} \Bigg]. \end{aligned}$$

Cette égalité est la plus avantageuse, parmi les autres, par le calcul récurrent des quantités S.

On voit très facilement que

$$S_{0,n} + S_{1,n} + S_{2,n} + \ldots + S_{n,n} = (n+1)!$$
$$S_{0,n} + S_{2,n} + S_{4,n} + \ldots = S_{1,n} + S_{3,n} + S_{5,n} + \ldots = \tfrac{1}{2}(n+1)!$$

si l'on fait $x = \pm 1$ dans l'identité

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+n) = S_{0,n} x^n + S_{1,n} x^{n-1} + \ldots + S_{n,n}.$$

On a, en particulier,

$$S_{2,n} = \frac{1}{4!}(n+1)n(n-1)(3n+2),$$

$$S_{3,n} = \frac{1}{4!.2}(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2),$$

$$\begin{aligned} S_{4,n} = & \frac{1}{5!.2^4.3}(n+1)n(n-1)(n-2) \\ & \times (n-3)(15n^3 + 15n^2 - 10n + 8), \end{aligned}$$

. . . .

L'équation (4) donne pour $S_{2,n}$ la valeur

$$\begin{aligned} S_{2,n} = \tfrac{1}{2}[& n^2(n-1) + (n-1)^2(n-2) \\ & + (n-2)^2(n-3) + \ldots + 2^2.1], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$2S_{2,n} = n^3 + (n-1)^3 + \ldots + 2^3$$
$$- n^2 - (n-1)^2 - \ldots - 2^2,$$

$$2S_{2,n} + 2 = \sum_1^n k^3 - \sum_1^n k^2.$$

Les deux précédentes valeurs de $S_{2,n}$ donnent lieu à l'identité

$$1.2^2 + 2.3^2 + \ldots + (n-1)n^2$$
$$= \frac{1}{3.4}(n+1)\,n(n-1)(3n+2).$$

On pourrait avoir d'autres identités par la comparaison des valeurs de $S_{3,n}$, $S_{4,n}$, ...