Nouvelles annales de mathématiques

Arthur Thiré

Sur la théorie du planimètre d'Amsler

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 353-364

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__353_0>

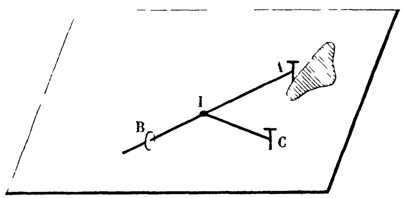
SUR LA THÉORIE DU PLANIMÈTRE D'AMSLER;

PAR M. ARTHUR THIRÉ,

Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur à l'École des Mines d'Ouro-Preto (Brésil).

On connaît l'ingénieux planimètre imaginé par Amsler pour la mesure des surfaces limitées à des courbes planes. Il se compose essentiellement (*fig.* 1) de deux branches CI, AIB articulées en I, et d'une roulette B dont l'axe est la branche AIB. Les extrémités C

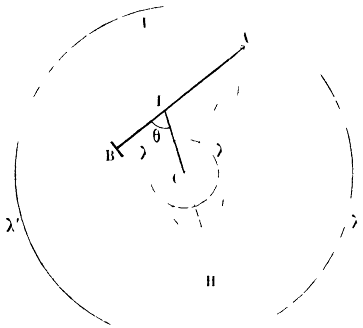
Fig. 1.



et A des deux branches sont munies de pointes. Quand l'instrument est placé sur un dessin, ses trois points d'appui sont les pointes C, A, et la roulette B. Les branches CI, AIB sont parallèles au plan du dessin; les pointes C et A lui sont perpendiculaires; le plan moyen de la roulette lui est aussi perpendiculaire. La pointe C est aigue; on peut la fixer en l'enfonçant légèrement dans le dessin et même dans la planchette sur laquelle est collé le dessin : c'est le *pôle* du planimètre. La pointe A est une simple pointe sèche ou style, destinée à suivre le contour d'une figure tracée sur le dessin. Lorsque, maintenant fixe la pointe C, on fait parcourir à la pointe A un arc de courbe quelconque, on détermine un certain roulement de la roulette; la valeur de ce roulement et l'aire de certaines surfaces qui dépendent de l'arc de courbe parcouru sont liées par une relation assez simple que nous nous proposons d'établir, et d'où se déduit la théorie du planimètre.

Soient (*fig.* 2) C le pôle du planimètre, A la pointe

Fig. 2.



mobile, CI, AIB les deux branches du planimètre, articulées en I.

La roulette a son centre en B à l'extrémité de la branche AIB.

Je désignerai par a la longueur IA, b la longueur IB, c la longueur IC, ρ le rayon vecteur variable CA.

Dans le triangle CIA, on a

$$a - c < \rho < a + c.$$

Il en résulte que, si l'on décrit deux circonférences du même centre C avec les rayons $(a - c)$ et $(a + c)$, la pointe mobile A sera située nécessairement dans l'espace annulaire compris entre ces deux circonférences limites que je représente en λλ et λ'λ'. J'appellerai cet espace annulaire la *zone d'action* du planimètre. Pour que l'on puisse faire suivre à la pointe A un certain arc de courbe, il faut que cet arc soit tout entier contenu dans cette zone d'action.

Imaginons que la branche CI reste fixe et que la branche AIB tourne autour de l'articulation I. La pointe A décrira un cercle, et la roulette B roulera sans glisser. J'appellerai *cercles de roulement* tous les cercles qui, lorsqu'ils sont ainsi décrits par la pointe A, conduisent à un mouvement de roulement sans glissement de la roulette.

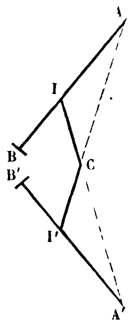
Quand la pointe A décrit un cercle de roulement, le point de contact de la roulette décrit sur le papier un cercle concentrique γ. Imaginons les trajectoires orthogonales des cercles γ. Quand le point de contact de la roulette décrit sur le papier une de ces trajectoires orthogonales, la pointe A décrit une courbe que j'appellerai *courbe de glissement* : il y a alors glissement sans roulement de la roulette.

Construisons la tangente en A à la courbe de glissement qui passe par ce point. Pour cela, déterminons le centre instantané de rotation de la branche AIB lorsque la pointe A décrit un élément de courbe de glissement. Ce centre instantané est le point d'intersection H de la branche IC et de la perpendiculaire à BA menée par le point B. En joignant HA, nous aurons en HA la normale en A à la courbe de glissement. AT perpendiculaire à AH est la tangente en A à cette courbe.

Soit CAIB (*fig.* 3) la position actuelle du planimètre. Considérons un second planimètre CA′I′B′ de mêmes dimensions que le premier, ayant même pôle C, ayant sa branche CI′ dans le prolongement du rayon vecteur CA et ayant son rayon vecteur CA′ dans le prolongement de la branche CI. A chaque position du planimètre CAIB correspond une position du planimètre

CA′I′B′. Il est clair que la position du premier planimètre se déduit de la position du second, de la même façon que la position du second de la position du premier. Nous appellerons ces deux planimètres *conjugués*.

Fig. 3.



Lorsque la pointe A du premier planimètre décrit une courbe, la pointe A′ du planimètre conjugué décrit une courbe que nous appellerons conjuguée de la première. Les points correspondants de ces deux courbes se rapportent à des positions correspondantes des pointes A et A′; nous appellerons ces points *conjugués*. Enfin nous appellerons *surfaces*, ou plus généralement *figures conjuguées*, deux surfaces ou figures dont tous les points seront deux à deux conjugués.

Une droite passant par le pôle C a évidemment pour conjuguée la circonférence d'un cercle de roulement, et inversement. Un arc de cercle ayant son centre au pôle C a pour conjugué un arc de cercle égal appartenant à la même circonférence.

Deux surfaces conjuguées sont limitées par des courbes de forme différente, mais ont des aires égales. En effet, décomposons ces surfaces conjuguées en tranches courbes infiniment minces par une série de cercles concentriques, de centre C, infiniment rapprochés les uns des autres. Dans les deux surfaces, ces tranches courbes infiniment minces se correspondent et sont conjuguées deux à deux. Deux tranches infiniment minces conjuguées ont évidemment même épaisseur et même longueur et, par conséquent, ont des aires égales.

Cette égalité des aires de deux surfaces conjuguées nous sera utile plus loin.

Lorsque la pointe A du planimètre se déplace d'une manière quelconque, le roulement de la roulette correspond à chaque instant à la composante, suivant une perpendiculaire à la branche BA, du chemin suivi par cette roulette. Établissons l'expression du roulement de la roulette pour un déplacement quelconque de la pointe A.

Rapportons les positions de la branche CI à une direction fixe, et appelons ω l'angle variable que la branche CI fait avec cette direction fixe.

Appelons θ l'angle variable CIB.

Considérons d'abord un déplacement infiniment petit de la pointe A du planimètre.

Soient, pour ce déplacement infiniment petit, dz le roulement de la roulette, $d\theta$ l'accroissement de θ, $d\omega$ l'accroissement de ω.

Le déplacement infiniment petit de la pointe A peut être décomposé en deux déplacements suivant un cercle de roulement et une courbe de glissement.

Soit $d\theta'$ l'accroissement de θ relatif au déplacement composant suivant un cercle de roulement.

Soit $d\theta''$ l'accroissement relatif au déplacement composant suivant une courbe de glissement.

On a

$$(1) \qquad d\theta = d\theta' + d\theta''.$$

Des deux déplacements composants, un seul fait rouler la roulette : c'est le déplacement suivant un cercle de roulement. Le roulement correspondant dz de la roulette a pour valeur absolue

$$b\,d\theta'.$$

Pour fixer le signe à attribuer à cette valeur, il faut fixer, pour la roulette, le sens des rotations positives. Nous prendrons pour sens positif des rotations de la roulette le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une montre par rapport à un observateur placé en I. Avec cette convention, nous aurons, en grandeur et en signe,

$$(2)\qquad dz = -\,b\,d\theta'.$$

Cherchons maintenant l'expression de $d\theta''$.

Pendant le déplacement composant suivant la courbe de glissement, CI tourne autour de C de l'angle $d\omega$. La branche BA tourne autour du centre instantané de rotation H d'un angle facile à déterminer : en effet, I décrit, pendant ce déplacement, l'arc $c\,d\omega$, et, par conséquent, l'angle de la rotation autour de H est

$$\frac{c\,d\omega}{\mathrm{IH}} \quad \text{ou} \quad \frac{c\cos\theta\,d\omega}{b}.$$

L'accroissement $d\theta''$ de l'angle θ résulte des déplacements angulaires des deux côtés IB, IC de cet angle et a évidemment pour expression la différence des déplacements angulaires de ces côtés. On a donc

$$(3)\qquad d\theta'' = \frac{c\cos\theta\,d\omega}{b} - d\omega.$$

Éliminons $d\theta'$ et $d\theta''$ entre (1), (2) et (3). Il vient

$$(4)\qquad dz = c\cos\theta\,d\omega - b(d\theta + d\omega).$$

Or, dans le triangle CIA, on a

$$\rho^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta,$$

d'où

$$c\cos\theta = \frac{\rho^2 - a^2 - c^2}{2a}.$$

Portons cette valeur de $c\cos\theta$ dans (4). Il vient

$$a\,dz = \frac{\rho^2 - a^2 - c^2}{2}\,d\omega - ab(d\theta + d\omega)$$

ou

$$(5)\qquad a\,dz = \frac{1}{2}\rho^2\,d\omega - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\,d\omega - ab\,d\theta.$$

Cette équation (5) est relative à un déplacement élémentaire quelconque de la pointe A du planimètre. Appliquons-la à un déplacement fini quelconque de cette pointe A. Pour cela, intégrons. Il vient, en appelant z le roulement total de la roulette,

$$(6)\qquad az = \frac{1}{2}\int\rho^2\,d\omega - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\int d\omega - ab\int d\theta.$$

Cette équation fondamentale donne directement la théorie du planimètre, comme je vais le montrer un peu plus loin.

Ordinairement, les divisions marquées sur la roulette du planimètre d'Amsler et sur le compteur qui enregistre le nombre de tours correspondent au roulement vrai z multiplié par la longueur a de la branche IA de l'instrument. On lit donc directement, sur l'instrument, la valeur du produit az qui représente le premier membre de l'équation (6) : c'est ce que nous appellerons le *roulement accusé* par l'instrument.

Remarquons que le terme $\frac{1}{2}\int\rho^2\,d\omega$ représente l'aire d'un secteur limité à deux rayons rectilignes issus de C et à la courbe conjuguée de la courbe décrite par la pointe A du planimètre; car le rayon vecteur CA′ du planimètre conjugué est constamment égal au rayon vecteur CA ou ρ du planimètre CAIB; en outre, les déplacements angulaires successifs de CA′ sont égaux aux déplacements angulaires successifs $d\omega$ de la branche CI dans le prolongement de laquelle il se trouve.

Appliquons la formule fondamentale (6) à divers cas.

PREMIER CAS : *Courbe fermée, le pôle étant à l'extérieur de cette courbe.* — Si la pointe A parcourt une courbe fermée qui laisse le pôle en dehors de la surface limitée par cette courbe, l'équation (6) se réduit à

$$az = \tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega.$$

Or $\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$ est l'aire de la surface conjuguée de la surface limitée par la courbe fermée décrite par la pointe A du planimètre. A cause de l'égalité des aires de deux surfaces conjuguées, on conclut que, dans ce cas, *le roulement accusé par le planimètre représente l'aire limitée par la courbe fermée décrite par la pointe de l'instrument.*

DEUXIÈME CAS : *Courbe fermée, le pôle étant à l'intérieur de cette courbe.* — Dans ce cas, la branche CI effectue une révolution complète, et $\int d\omega$ a, par conséquent, pour valeur 2π. L'équation (6) se réduit alors à

$$az = \tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega - \pi(a^2 + c^2 + 2ab)$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega = az + \pi(a^2 + c^2 + 2ab).$$

On en conclut que, dans ce cas, *l'aire limitée par la courbe fermée décrite par la pointe du planimètre a pour valeur le roulement accusé par l'instrument, augmenté de la constante* $\pi(a^2 + c^2 + 2ab)$.

TROISIÈME CAS : *Arc de courbe dont les extrémités sont à égale distance du pôle.* — Considérons, d'une part, le secteur limité à cet arc et à deux rayons issus du pôle et, d'autre part, le secteur limité à l'arc conjugué et à deux rayons issus du pôle. On vérifie aisément que ces deux secteurs ont même surface, en les décomposant en tranches infiniment minces par des cercles concentriques ayant le pôle pour centre.

Appliquons la formule (6) à l'arc du premier secteur. Les extrémités de cet arc étant à la même distance du pôle, les valeurs initiale et finale de θ sont égales, et l'on a

$$\int d\theta = 0.$$

En appelant Ω l'angle au centre de ce secteur, on a

$$\int d\omega = \Omega.$$

La formule (6) devient donc

$$az = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\,\Omega$$

ou

$$\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega = az + \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\,\Omega.$$

$\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$ représente indifféremment la surface de l'un ou l'autre des deux secteurs que nous avons considérés et dont les aires sont égales. De cette dernière équation, on conclut que *l'aire du secteur limité par un arc de courbe dont les extrémités sont à égale distance du pôle a pour valeur le roulement accusé par le planimètre (lorsque la pointe de l'instrument parcourt cet arc) augmenté du terme* $\frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\,\Omega$, *qui est proportionnel à l'angle au centre du secteur.*

Quatrième cas : *Arc de courbe quelconque.* — Pour un arc de courbe ouvert quelconque, l'équation (6) donne

$$az = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}(\omega_2 - \omega_1) - ab(\theta_2 - \theta_1),$$

ω_1 et θ_1 étant les valeurs initiales de ω et θ, ω_2 et θ_2 étant leurs valeurs finales.

Si l'on pose

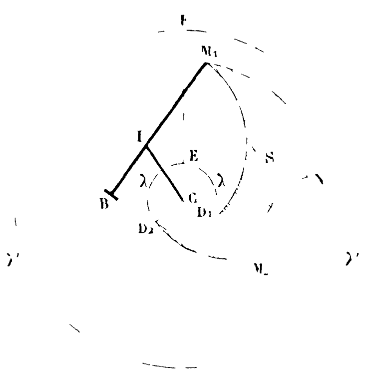
$$r^2 = a^2 + c^2 + 2ab,$$
$$r'^2 = 2ab,$$

on arrive à cet énoncé :

Le roulement accusé par le planimètre, lorsque la pointe parcourt un arc de courbe quelconque, représente l'aire du secteur limité à l'arc conjugué et à deux rayons issus du pôle, diminuée de la somme des aires de deux secteurs circulaires ayant l'un pour rayon r et pour angle au centre l'accroissement $(\omega_2 - \omega_1)$ de ω, l'autre pour rayon r' et pour angle au centre l'accroissement $(\theta_2 - \theta_1)$ de θ.

Des trois termes qui figurent dans l'expression de az, les deux derniers dépendent seulement des positions initiale et finale du planimètre; le premier terme dépend des positions intermédiaires par lesquelles passe l'instrument.

Fig. 4.



Soit M_1NM_2 (*fig.* 4) l'arc de courbe quelconque décrit par la pointe du planimètre. Considérons le secteur limité à l'arc M_1NM_2 et aux deux rayons vecteurs mixtilignes CD_1M_1, CD_2M_2 formés par les rayons CD_1, CD_2 du cercle $\lambda\lambda$ [cercle de centre C et de rayon $(a - c)$] et par les cercles de roulement D_1M_1, D_2M_2. On voit aisément que la surface S de ce secteur est égale à la surface du secteur limité à l'arc de courbe conjugué, et qui a pour expression

$$\tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega.$$

On a donc, pour nouvelle expression du roulement de la roulette,

$$az = S - \tfrac{1}{2}r^2(\omega_2 - \omega_1) - \tfrac{1}{2}r'^2(\theta_2 - \theta_1).$$

Cinquième cas : *La pointe de l'instrument parcourt, suivant la direction d'un rayon, la largeur entière* EF *de la zone d'action du planimètre* (*fig.* 4). — La courbe conjuguée du chemin parcouru EF est une demi-circonférence de cercle de roulement. Le secteur, dont l'aire a pour valeur $\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$, est un demi-cercle de rayon a. On a donc, dans ce cas particulier,

$$\frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega = \frac{\pi a^2}{2};$$

ω variant de o à π, et θ variant de π à o, on a

$$\int d\omega = \pi,$$
$$\int d\theta = -\pi.$$

L'expression de az devient ainsi

$$az = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}\pi + ab\pi$$

ou, en simplifiant,

$$z = -\frac{\pi c^2}{2a}.$$

Il convient d'observer que ce roulement z est indépendant de b, et, par conséquent, qu'il est le même, quelle que soit la position de la roulette sur la barre AI.

De là on déduit accessoirement le théorème suivant :

Dans le mouvement d'une manivelle CI *et d'une bielle* IA *dont l'extrémité* A *se meut suivant une direction passant par le centre* C *de la manivelle, si diverses roulettes de même rayon sont montées en divers points de la bielle* IA *qui leur sert d'axe commun, de façon qu'elles puissent rouler sur un plan* P *parallèle au plan de la manivelle et de la bielle, le roulement de toutes ces roulettes est le même pour une demi-révolution de la manivelle entre ses deux points morts : ce roulement commun aux diverses roulettes a pour expression*

$$\frac{\pi\,\overline{\mathrm{CI}}^2}{2\,\mathrm{AI}}.$$