M. DU CHATENET

Étude sur les paris de courses

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 327-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__327_1>

ÉTUDE SUR LES PARIS DE COURSES;

PAR M. M. DU CHATENET.

PRÉLIMINAIRES.

Les paris de courses peuvent se diviser en deux grandes catégories, les paris *pour* les chevaux et les paris *contre* les chevaux. Dans le premier cas, le parieur a gagné quand le cheval qu'il a désigné arrive premier; dans le second, le parieur a gagné quand le cheval désigné n'arrive pas. Ces deux espèces de paris sont la conséquence naturelle l'une de l'autre; leur existence est simultanée; l'une forme la contre-partie nécessaire de l'autre.

On dit encore qu'on *prend* les chevaux ou qu'on les *donne.* Celui qui parie pour les chevaux est le *preneur*, celui qui parie contre eux est le *donneur*. Ce pari peut fort bien être comparé à une opération de bourse à terme; le preneur joue le rôle d'acheteur, et le donneur, celui de vendeur.

La base des paris de courses est la suivante : Le preneur d'un cheval parie un enjeu P qu'il arrivera premier; mais, comme plusieurs chevaux doivent prendre part à la course en question et que leurs qualités respectives ne sont pas les mêmes, on conçoit que la probabilité que le cheval désigné a d'arriver varie suivant le nombre et les qualités de ses concurrents. Si le preneur gagne, il devra donc recevoir, après avoir retiré son enjeu, une somme Q, généralement différente de P.

Nous admettons comme un axiome que, dans tout pari équitable, si les chances que plusieurs parieurs ont de gagner une certaine somme sont égales, leurs enjeux doivent aussi être égaux. Si q joueurs peuvent gagner une somme S à chances égales, leur mise devra être $\frac{S}{q}$, et la probabilité que chacun d'eux a de gagner est $\frac{1}{q}$. Si une seule personne se substitue à p joueurs, pour que le jeu reste équitable, il faudra qu'elle fournisse p enjeux égaux à $\frac{S}{q}$, soit une somme $\frac{p}{q}S$; elle acquiert donc la probabilité $\frac{p}{q}$ de gagner.

Nous voyons donc que, dans un jeu ou pari équitable, l'enjeu de chacun des joueurs ou parieurs doit être égal au produit de la somme qui sera dévolue au gagnant, par la probabilité qu'il a de l'obtenir. La somme S étant formée de la réunion des enjeux contient aussi celui du gagnant; le bénéfice réel sera donc $S\left(1-\frac{p}{q}\right)$.

Le produit $\frac{p}{q}S$ porte le nom d'*espérance mathéma-*

tique du joueur. Dans un jeu équitable, l'enjeu doit être égal à l'espérance mathématique.

Soit une course à laquelle doivent prendre part plusieurs chevaux. On les donne et les prend aux cotes a, b, c, d, ... Cela veut dire que, si le cheval qui a été pris arrive, le preneur recevra, après avoir retiré son enjeu, une somme égale à a, b, c, d, ... fois cet enjeu. Si le cheval a pour cote m et que l'enjeu ait déjà été fourni, le preneur touchera donc une somme égale à $m+1$ fois l'enjeu ou $(m+1)P$.

Soit μ la probabilité de gagner; l'espérance mathématique sera, d'après ce que nous avons dit, $\mu(m+1)P$; or, comme elle doit être égale à P, il s'ensuit que

$$\mu = \frac{1}{m+1} \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{1}{\mu} - 1.$$

Si la cote est bien faite, la probabilité d'un cheval est égale à l'inverse de sa cote augmenté de l'unité, et sa cote à l'inverse de la probabilité diminué de l'unité. Ces deux éléments peuvent donc être déduits très facilement l'un de l'autre.

La conséquence de ce qui précède est qu'on devra avoir, entre les cotes de tous les chevaux engagés pour une même course, la relation suivante

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} + \ldots = 1$$

ou, en écrivant d'une manière symbolique,

$$\sum \frac{1}{a+1} = 1.$$

Dans la pratique, il n'arrive presque jamais qu'il en soit ainsi. En effet, les cotes, puisqu'elles sont fonction de la probabilité, n'ont rien d'absolu et peuvent varier d'une personne à l'autre suivant que sa connaissance ou son appréciation des qualités de tel ou tel cheval ou de ses bonnes dispositions la porte à avoir plus ou moins de confiance en lui. On comprend aussi que les cotes doivent varier sur le marché suivant les lois bien connues de l'offre et de la demande. Il est évident que, lorsqu'on aura $\sum \frac{1}{a+1} > 1$, l'ensemble des paris devra être favorable aux donneurs et que, lorsqu'on aura $\sum \frac{1}{a+1} < 1$, il sera favorable aux preneurs. L'une ou l'autre de ces inégalités sera vérifiée suivant que l'influence des uns ou des autres l'emportera sur le marché.

Quand on a $\sum \frac{1}{a+1} > 1$, on peut écrire

$$\sum \frac{1}{a+1} = 1 + M,$$

M étant un nombre, c'est-à-dire une grandeur essentiellement positive. Ce nombre M, par analogie avec ce qui se passe dans le cas des assurances, a reçu le nom de *chargement* (E. Dormoy, *Journal des Actuaires français*, t. III, 1874). Si, au contraire, $\sum \frac{1}{a+1} < 1$, on pourra écrire $\sum \frac{1}{a+1} = 1 - N$, N étant un nombre que nous appellerons, dans ce cas, le *déchargement*. L'avantage des donneurs de chevaux augmentera en même temps que le chargement, et celui des preneurs en même temps que le déchargement.

On appelle *faire un livre* disposer ses paris pour ou contre les chevaux, de manière à obtenir un bénéfice certain, quel que soit le résultat de la course. Un livre bien fait est, d'après ce qui a été dit, incompatible avec un jeu équitable; car, lorsque les cotes présentent un chargement ou un déchargement, les enjeux ne sont plus tous égaux à l'espérance mathématique.

Il est certain que l'opération du parieur qui donne tous les chevaux au public, suivant son livre, ne constitue pas un jeu équitable si l'on considère le public comme une même personne; mais, quand un parieur vient prendre un cheval à une cote m, c'est que, suivant son appréciation, sa probabilité de gagner est supérieure à $\frac{1}{m+1}$. Le jeu ne serait équitable que si le preneur croyait la probabilité égale à $\frac{1}{m+1}$, et, dans ce cas, il n'aurait plus intérêt à prendre le cheval. On peut donc dire que d'aucun côté le pari n'est équitable, parce que l'appréciation du cheval, d'où dérive la cote et qui domine toute la question, varie d'une personne à l'autre.

Les paris que l'on peut faire à propos de courses pour ou contre les chevaux sont extrêmement variés. Nous examinerons un certain nombre d'entre eux.

I. — *Livre du preneur de chevaux.*

Soit une course dans laquelle différents chevaux sont engagés et dont les cotes sont a, b, c, d, ... Cherchons quels enjeux x, y, z, ... on devra parier pour chacun d'eux, de manière à obtenir un bénéfice A si le cheval coté a arrive, B si c'est celui coté b, etc.

Il suffira, pour cela, d'écrire que la somme à recevoir, qui est $(a+1)x$, y compris la mise, est égale à la somme de tous les enjeux augmentée du bénéfice. Nous obtiendrons ainsi, en appliquant le même raisonnement à l'hypothèse où chacun des chevaux arriverait premier, le système d'équations suivant

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} (a+1)x &= x+y+z+\ldots+\mathrm{A},\\ (b+1)y &= x+y+z+\ldots+\mathrm{B},\\ (c+1)z &= x+y+z+\ldots+\mathrm{C},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

on aura autant d'équations qu'il y a de chevaux, c'est-à-dire le nombre nécessaire pour déterminer toutes les inconnues.

On en déduit, en les combinant deux à deux,

$$y = \frac{(a+1)x + B - A}{b+1}, \qquad z = \frac{(a+1)x + C - A}{c+1}, \qquad \ldots .$$

En portant ces valeurs dans la première équation du système, on obtiendra la valeur de x et par symétrie celles des autres inconnues. Les solutions seront

$$x = \left(\frac{\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1} + \frac{C}{c+1} + \ldots}{1 - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \ldots} + A \right) \frac{1}{a+1},$$

$$y = \left(\frac{\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1} + \frac{C}{c+1} + \ldots}{1 - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} - \ldots} + B \right) \frac{1}{b+1},$$

$$z = \left(\frac{\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1} + \frac{C}{c+1} + \ldots}{1 - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \ldots} + C \right) \frac{1}{c+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En adoptant l'écriture symbolique suivante et en introduisant la valeur du déchargement, les formules deviendront

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{N} \sum \frac{A}{a+1} + A \right) \frac{1}{a+1}, \\ y &= \left(\frac{1}{N} \sum \frac{A}{a+1} - B \right) \frac{1}{b+1}, \\ z &= \left(\frac{1}{N} \sum \frac{A}{a+1} + C \right) \frac{1}{c+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

En faisant la somme $x + y + z + \ldots$, nous aurons la somme à verser entre les mains du donneur s'il l'exige, c'est-à-dire le capital employé à l'opération. Il est égal à $\frac{1}{N}\sum\frac{A}{a+1}$.

Le rendement de l'opération, c'est-à-dire le rapport du gain au capital employé, sera, si c'est le premier cheval qui arrive, $\frac{AN}{\sum\frac{A}{a+1}}$.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les valeurs trouvées pour x, y, z, ... soient toutes positives.

Le simple examen des formules (2) montre que cette condition sera satisfaite quand on aura $\sum\frac{1}{a+1} < 1$, c'est-à-dire quand il y aura un déchargement.

On peut montrer aussi que le déchargement est nécessaire. En effet, supposons $\sum\frac{1}{a+1} > 1$; alors, pour que la valeur de x, par exemple, soit positive, il faut que

$$\sum\frac{1}{a+1} - \frac{1}{A}\sum\frac{A}{a+1} > 1.$$

Pour que celles de y, z, ... le soient, il faudra que des inégalités analogues soient satisfaites, obtenues en remplaçant A par B, C, ... Soit A la plus petite des grandeurs A, B, C, ...; le produit $\frac{1}{A}\sum\frac{A}{a+1}$ sera composé d'une somme de fractions dont l'une aura pour numérateur l'unité, et les autres des numérateurs tous supérieurs à l'unité; ce produit sera donc supérieur à $\sum\frac{1}{a+1}$, et le premier membre de l'inégalité à satisfaire sera négatif, ce qui conduit à une absurdité.

La seule condition de possibilité du problème est donc l'existence d'un déchargement. La somme à employer sera alors inversement proportionnelle au déchargement, et le rendement lui sera proportionnel.

Des formules générales (2), nous pouvons déduire quelques cas particuliers intéressants, qui correspondent à des applications pratiques.

Supposons que le preneur veuille obtenir un bénéfice uniforme quel que soit le cheval qui arrive. Il suffira, dans les formules (2), de faire $A = B = C = \ldots = Q$. Les valeurs des enjeux se simplifient et deviennent

$$(3)\qquad x = \frac{1}{a+1}\,\frac{Q}{N}, \quad y = \frac{1}{b+1}\,\frac{Q}{N}, \quad z = \frac{1}{c+1}\,\frac{Q}{N}, \quad \ldots$$

Le capital employé sera égal à $\left(\frac{1}{N} - 1\right)Q$, et le rendement à $\frac{N}{1-N}$.

Les enjeux devront être, comme précédemment, proportionnels à la probabilité et au bénéfice cherché, et inversement proportionnels au déchargement.

La probabilité que les divers chevaux ont d'arriver est loin d'être la même, et, dans une même course, les cotes présentent presque toujours de grandes différences. Il y a donc tout intérêt pour le parieur à disposer ses enjeux, de manière à recueillir des bénéfices d'autant plus forts que le cheval qui y donnera lieu a une plus grande probabilité d'arriver.

Le parieur dispose complètement des grandeurs A, B, C, ...; il peut choisir à son gré le bénéfice qu'il veut réaliser sur chaque cheval. Il pourra donc fixer, comme il lui plaira, une relation entre A, B, C, ... et a, b, c, ... Supposons que le gain que l'on veut obtenir sur un cheval soit proportionnel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la probabilité qu'il a d'arriver. Il suffira, dans les formules (2), de faire

$$A = \frac{p}{(a+1)^n}, \qquad B = \frac{p}{(b+1)^n}, \qquad C = \frac{p}{(c+1)^n}, \qquad \ldots$$

p étant un nombre quelconque qui restera à la disposition du parieur. Les formules donnent alors

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{p}{a+1}\left[\frac{1}{N}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(a+1)^n}\right],\\ y &= \frac{p}{b+1}\left[\frac{1}{N}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(b+1)^n}\right],\\ z &= \frac{p}{c+1}\left[\frac{1}{N}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(c+1)^n}\right],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital employé sera

$$\frac{p}{N}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}}.$$

Les enjeux ne seront plus proportionnels à la probabilité, mais ils varieront dans le même sens. Ils seront proportionnels à p, que l'on pourrait appeler le coefficient caractéristique de l'opération. Étant donné le capital S dont on dispose et que l'on veut engager dans l'opération, on pourra en déduire p. On aura, en effet,

$$p = \frac{NS}{\sum\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n+1}}.$$

Quand on fait au preneur l'obligation de verser le montant de ses enjeux, celui-ci a tout intérêt à adopter la combinaison qui demandera l'emploi d'un moindre capital. Il est des parieurs qui renoncent à obtenir un bénéfice quel que soit le cheval gagnant, et qui, en s'arrangeant de manière à ne rien perdre en toute hypothèse, ne cherchent à gagner que sur un ou plusieurs chevaux en qui ils ont particulièrement confiance. Ce mode d'opérer repose plus que les précédents sur l'appréciation personnelle des chevaux engagés; il consiste à parier pour les gagnants qui paraissent les plus probables et à se couvrir sur les autres.

Ce cas particulier peut encore se déduire des formules (2). Supposons qu'on veuille gagner des sommes A et B sur les chevaux cotés a et b, et seulement se couvrir sur les autres. On fera $C = 0$, $D = 0$, ..., et les valeurs des enjeux auront pour expression

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \left[\frac{1}{N}\left(\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1}\right) + A\right]\frac{1}{a+1},\\ y &= \left[\frac{1}{N}\left(\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1}\right) + B\right]\frac{1}{b+1},\\ z &= \frac{1}{N}\left(\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1}\right)\frac{1}{c+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital employé sera

$$\frac{1}{N}\left(\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1}\right).$$

On peut, tout en acceptant l'idée de ne faire un bénéfice que sur des chevaux déterminés et de se couvrir sur les autres, vouloir que ce bénéfice soit uniforme en toute hypothèse favorable. On fera, dans les formules (5), $A = B = Q$, ce qui donnera

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{Q}{N}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + N\right)\frac{1}{a+1},\\ y &= \frac{Q}{N}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + N\right)\frac{1}{b+1},\\ z &= \frac{Q}{N}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + N\right)\frac{1}{c+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital employé sera

$$\frac{Q}{N}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right).$$

Supposons enfin qu'on veuille obtenir sur deux chevaux, tout en se couvrant sur les autres, un bénéfice proportionnel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la probabilité de l'obtenir. Les formules deviendront

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{p}{\mathrm{N}}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}} - \frac{1}{(b+1)^{n+1}} + \frac{\mathrm{N}}{(a+1)^{n}}\right]\frac{1}{a+1},\\ y &= \frac{p}{\mathrm{N}}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(b+1)^{n+1}} + \frac{\mathrm{N}}{(b+1)^{n}}\right]\frac{1}{b+1},\\ z &= \frac{p}{\mathrm{N}}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(b+1)^{n+1}}\right]\frac{1}{c+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital employé sera

$$\frac{p}{\mathrm{N}}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}} + \frac{1}{(b+1)^{n+1}}\right].$$

Prenons un exemple numérique et appliquons-lui chacune des quatre méthodes que nous venons d'exposer. Soient six chevaux engagés dans une course et offerts aux cotes suivantes :

$$2\tfrac{3}{4},\quad 3\tfrac{1}{2},\quad 4,\quad 7,\quad 12,\quad 16.$$

Ces cotes correspondent à un déchargement de 0,05.

Supposons que nous voulions gagner sur ces différents chevaux 100^{fr}, 120^{fr}, 130^{fr}, 90^{fr}, 80^{fr}, 70^{fr}. Nous devrons disposer nos enjeux comme il suit :

$$564^{fr},50,\quad 474^{fr},85,\quad 429^{fr},35,\quad 263^{fr},35,\quad 161^{fr},30,\quad 122^{fr},75.$$

Le capital employé sera

$$2016^{fr},10.$$

Si nous voulons gagner 100^{fr} dans la course, quel que soit le cheval qui arrive, nous devrons placer nos mises de la manière suivante :

$$533^{fr},35,\quad 444^{fr},45,\quad 400^{fr},\quad 250^{fr},\quad 153^{fr},85,\quad 117^{fr},65.$$

Le capital employé sera

$$1900^{fr},$$

en nombre rond, et le rendement de l'opération

$$0,052 \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{19},$$

soit un peu plus de 5 pour 100.

Si nous voulons obtenir sur chaque cheval un bénéfice proportionnel à sa probabilité d'arriver, nous placerons nos enjeux comme il suit, en faisant $p = 100$,

$$106^{fr},50, \quad 87^{fr},75, \quad 78^{fr},50, \quad 48^{fr},15, \quad 29^{fr},25, \quad 22^{fr},25.$$

Le capital employé sera

$$372^{fr},40;$$

le bénéfice sera, suivant le gagnant,

$$26^{fr},65, \quad 21^{fr},40, \quad 20^{fr}, \quad 12^{fr},50, \quad 7^{fr},50, \quad 5^{fr},90.$$

Si nous voulons gagner 100^{fr} et 120^{fr} sur les deux premiers chevaux susdits en nous couvrant sur les autres, nous disposerons ainsi nos mises :

$$311^{fr},05, \quad 263^{fr},65, \quad 213^{fr},30, \quad 133^{fr},30, \quad 82^{fr},05, \quad 62^{fr},75.$$

Le capital employé sera

$$1066^{fr},10.$$

II. — *Livre du donneur de chevaux.*

Nous avons vu que l'existence du déchargement était indispensable pour que le preneur puisse faire un livre. Dans la pratique, il est très rare qu'il en soit ainsi : les cotes présentent presque toujours un chargement assez important, c'est-à-dire que les conditions générales des paris sont favorables aux donneurs.

Comme le preneur de chevaux touche ordinairement, en cas de gain, une somme beaucoup plus forte que celle qu'il a exposée, et que cette perspective exerce sur la grande majorité des hommes une séduction spéciale, une espèce de fascination, il n'est pas étonnant que le public fasse un certain sacrifice pour prendre une position qui lui est particulièrement agréable. D'autre part, les paris contre les chevaux ont seuls fait l'objet d'une industrie organisée, celle des bookmakers; on devait donc s'attendre à voir ces derniers prélever sur leurs opérations un bénéfice déterminé, dû au chargement, et analogue à la commission d'un intermédiaire, au courtage d'un agent de change.

Soient a, b, c, ... les cotes de divers chevaux engagés dans une course; cherchons quelles mises x, y, z, ... le donneur pourra accepter de manière à obtenir un bénéfice A si le cheval coté a arrive, B si c'est celui coté b, etc.

Cette question est immédiatement résolue au moyen des équations (1) qui nous ont servi à étudier la position du preneur. Si, au lieu d'un chargement, il existe un déchargement M, il suffira de changer, dans ces équations, le signe de A, B, C, ..., et les formules générales donnant la solution du problème seront

$$(6)\quad \begin{cases} x = \left(\dfrac{1}{M}\sum\dfrac{A}{a+1} - A\right)\dfrac{1}{a+1}, \\ y = \left(\dfrac{1}{M}\sum\dfrac{A}{a+1} - B\right)\dfrac{1}{b+1}, \\ z = \left(\dfrac{1}{M}\sum\dfrac{A}{a+1} - C\right)\dfrac{1}{c+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Le capital engagé dans l'opération par le donneur sera

$$\frac{1}{M}\sum\frac{A}{a+1}.$$

Si l'on compare les formules (2) avec les formules (6), on est frappé de ce fait remarquable que les valeurs de x, y, z, ... peuvent devenir nulles dans les dernières. Le donneur pourra donc faire un livre en opérant seulement sur une partie des chevaux, au lieu que le preneur ne pourra en négliger aucun.

Si le donneur veut obtenir un bénéfice uniforme Q, quel que soit le cheval qui arrive, on fera, dans les formules, $A = B = C = \ldots = Q$, et elles donneront

$$(7) \quad x = \frac{Q}{M}\,\frac{1}{a+1}, \qquad y = \frac{Q}{M}\,\frac{1}{b+1}, \qquad z = \frac{Q}{M}\,\frac{1}{c+1}, \qquad \ldots$$

Le capital engagé sera

$$Q\,\frac{1+M}{M},$$

et le rendement

$$\frac{M}{1+M}.$$

Si l'on veut réaliser sur chaque cheval un gain proportionnel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de sa probabilité d'arriver, on se servira des formules suivantes :

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned}
x &= \frac{p}{a+1}\left[\frac{1}{M}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}} - \frac{1}{(a+1)^n}\right],\\
y &= \frac{p}{b+1}\left[\frac{1}{M}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}} - \frac{1}{(b+1)^n}\right],\\
z &= \frac{p}{c+1}\left[\frac{1}{M}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}} - \frac{1}{(c+1)^n}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Le capital engagé par la contre-partie sera

$$\frac{p}{M}\sum\frac{1}{(a+1)^{n+1}}.$$

Si l'on veut obtenir un bénéfice A et B sur deux chevaux en se bornant à se couvrir sur les autres, les formules donneront

$$(9) \quad \left\{\begin{aligned}
x &= \left[\frac{1}{M}\left(\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1}\right) - A\right]\frac{1}{a+1},\\
y &= \left[\frac{1}{M}\left(\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1}\right) - B\right]\frac{1}{b+1},\\
z &= \frac{1}{M}\left(\frac{A}{a+1} + \frac{B}{b+1}\right)\frac{1}{c+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Le capital sera

$$\frac{1}{M}\left(\frac{A}{a+1}+\frac{B}{b+1}\right).$$

Si le bénéfice que l'on veut faire est le même sur les deux chevaux, les formules deviendront

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{Q}{M}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-M\right)\frac{1}{a+1},\\ y &= \frac{Q}{M}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}-M\right)\frac{1}{b+1},\\ z &= \frac{Q}{M}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)\frac{1}{c+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital sera

$$\frac{Q}{M}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right).$$

Si, enfin, on veut obtenir sur deux chevaux un bénéfice proportionnel à la n^{ieme} puissance de la probabilité, on aura

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{p}{M}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(b+1)^{n+1}}-\frac{M}{(a+1)^{n}}\right]\frac{1}{a+1},\\ y &= \frac{p}{M}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(b+1)^{n+1}}-\frac{M}{(b+1)^{n}}\right]\frac{1}{b+1},\\ z &= \frac{p}{M}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(b+1)^{n+1}}-\frac{M}{(c+1)^{n}}\right]\frac{1}{c+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Le capital sera

$$\frac{p}{M}\left[\frac{1}{(a+1)^{n+1}}+\frac{1}{(b+1)^{n+1}}\right].$$

Deux personnes qui font un pari se bornent très souvent à l'inscrire et le règlent après la course. Mais il arrive aussi, et toujours avec les bookmakers qui opèrent sur le champ de course, que le donneur reçoit à l'avance le montant du pari des mains du preneur. Nous avons indiqué, dans chaque cas, la somme qu'il avait à recevoir. Si, au contraire, le donneur avait à verser à l'avance le montant de son pari, cette somme serait représentée par

$$ax + by - cz + \ldots,$$

ce qui donnerait, dans le premier cas,

$$\frac{1}{M}\sum\frac{1}{a-1}\sum\frac{a}{a+1} - \sum\frac{Aa}{a+1},$$

et, dans le second cas,

$$\frac{Q}{M}\sum\frac{a}{a+1}.$$

III. — *Chevaux placés deuxièmes.*

La coutume est de parier que tel cheval arrivera ou n'arrivera pas premier. Cependant, puisque les paris de courses reposent sur l'appréciation des qualités des chevaux, il est aussi naturel de parier que tel cheval arrivera ou n'arrivera pas second. Il y a donc lieu de se demander quelles doivent être les cotes de second a', b', c', d', ... des chevaux engagés dans une course et qui ont pour la place de premier les cotes a, b, c, d, ...

Les cotes de second ne sont pas définies sur le marché, et il faut pouvoir les déduire de celles que l'on connaît. On ne peut indiquer aucune relation rigoureusement exacte entre ces différentes espèces de cotes. Celles de premier sont, en effet, essentiellement liées les unes aux autres, et, si l'on supprime un cheval de la course, leurs valeurs relatives doivent changer. Nous admettrons, comme l'idée la plus naturelle, que les cotes de second restent proportionnelles à celles de premier.

Dans ce cas où le cheval coté b arrive premier, la probabilité, pour que le cheval coté a arrive second, sera

$$\frac{\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a-1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}+\ldots}$$

ou

$$\frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{b+1}},$$

et, pour que ces deux événements arrivent à la fois, la probabilité sera le produit de celle de chacun d'eux, soit

$$\frac{\frac{1}{a+1}\,\frac{1}{b+1}}{1+M-\frac{1}{b+1}}.$$

De même, pour que le cheval coté a arrive second, le cheval coté c arrivant premier, la probabilité est

$$\frac{\frac{1}{a+1}\,\frac{1}{c+1}}{1+M-\frac{1}{c+1}}, \quad \cdots$$

La probabilité cherchée sera la somme de toutes ces probabilités partielles, ou

$$\frac{1}{a+1}\left(\frac{\frac{1}{b+1}}{1+M-\frac{1}{b+1}}+\frac{\frac{1}{c+1}}{1+M-\frac{1}{c+1}}+\frac{\frac{1}{d+1}}{1+M-\frac{1}{d+1}}+\cdots\right),$$

ce qu'on peut écrire symboliquement

$$(12)\qquad \frac{1}{a'+1}=\frac{1}{a+1}\left(\sum\frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{a}{a+1}}-\frac{\frac{1}{a+1}}{1+M-\frac{1}{a+1}}\right).$$

En faisant la somme des probabilités qu'ont les chevaux d'une même course d'arriver seconds, nous obtiendrons

$$1+M.$$

Le chargement ou déchargement ne sera donc pas modifié, ce qui rend assez plausible l'hypothèse adoptée.

On aura donc

$$\sum \frac{1}{a'+1} = \sum \frac{1}{a+1} = 1 + M.$$

La formule (12) permettra de calculer les cotes de second en fonction des cotes de premier. On pourra se proposer sur les chevaux seconds les mêmes questions que nous avons déjà étudiées. Le livre se fera de la même manière au moyen des nouvelles cotes. Le chargement ou déchargement étant le même, si une des catégories de parieurs était avantagée par les premières cotes, cet avantage persistera avec les secondes.

Prenons un exemple numérique. Soient cinq chevaux figurant dans une course avec les cotes $1\frac{1}{2}$, 3, 4, 7, 9, qui correspondent à un chargement de 0,075. Les cotes de second seront, à très peu près,

$$2\tfrac{1}{4},\quad 2\tfrac{3}{4},\quad 3\tfrac{1}{2},\quad 5\tfrac{1}{2},\quad 7.$$

On voit qu'elles diffèrent notablement des précédentes; les unes sont augmentées, et les autres diminuées. Cela se comprend facilement, car un cheval peut très bien avoir une probabilité plus grande pour arriver premier que second.

IV. — *Chevaux placés troisièmes.*

Les paris sur les chevaux placés seconds ont parfaitement leur raison d'être; car, la première place étant généralement à la fin de la course disputée par deux chevaux seulement, le cheval arrivant second est réellement celui qui a le plus de valeur après le premier; mais il n'y a presque jamais lieu de parier sur les chevaux placés troisièmes. Cependant, dans les courses importantes, on fait au second des avantages notables, de telle façon que la seconde place se trouve ordinairement disputée par deux chevaux ; on peut, dans ce cas, parier sur le cheval placé troisième. Nous rechercherons donc quelle probabilité un cheval a d'arriver troisième, afin de fixer sa cote de troisième.

Soient a, b, c, d, ... les cotes de premier. Nous savons comment on en déduit les cotes de second a', b', c', d', ... Cherchons la probabilité qu'a le cheval coté a d'arriver troisième. Supposons que le cheval coté b soit premier ; la probabilité de cet événement est

$$\frac{1}{b+1}.$$

Supposons, en outre, que le cheval coté c soit second ; la probabilité est

$$\frac{1}{c'+1};$$

et, pour que les deux événements arrivent à la fois, la probabilité est

$$\frac{1}{b+1}\,\frac{1}{c'+1}.$$

Alors, pour que le cheval coté a soit troisième, en admettant toujours la même hypothèse déjà adoptée, la probabilité sera

$$\frac{\dfrac{1}{a+1}}{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{e+1}+\ldots}.$$

Nous représenterons cette fraction par P_{bc}. La probabilité du triple événement sera donc

$$\frac{1}{b+1}\,\frac{1}{c'+1}\,P_{bc}.$$

Mais, le cheval coté b étant premier, tous les autres, sauf celui coté a, peuvent être seconds ; nous aurons donc la somme

$$\frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{c'+1}\mathrm{P}_{bc}+\frac{1}{d'+1}\mathrm{P}_{bd}+\frac{1}{e'+1}\mathrm{P}_{be}+\ldots\right).$$

Tous les chevaux peuvent être premiers avec les probabilités $\frac{1}{c+1}$, $\frac{1}{d+1}$, $\frac{1}{e+1}$, ... Nous devrons donc combiner la place de premier de chacun d'eux avec celle de second de tous ceux qui restent, sauf celui coté a. La probabilité cherchée aura pour expression

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{c'+1}\mathrm{P}_{bc}+\frac{1}{d'+1}\mathrm{P}_{bd}+\frac{1}{e'+1}\mathrm{P}_{be}+\frac{1}{f'+1}\mathrm{P}_{bf}+\ldots\right)\\
+&\frac{1}{c+1}\left(\frac{1}{b'+1}\mathrm{P}_{cb}+\frac{1}{d'+1}\mathrm{P}_{cd}+\frac{1}{e'+1}\mathrm{P}_{ce}+\frac{1}{f'+1}\mathrm{P}_{cf}+\ldots\right)\\
+&\frac{1}{d+1}\left(\frac{1}{b'+1}\mathrm{P}_{db}+\frac{1}{c'+1}\mathrm{P}_{dc}+\frac{1}{e'+1}\mathrm{P}_{de}+\frac{1}{f'+1}\mathrm{P}_{df}+\ldots\right)\\
+&\frac{1}{e+1}\left(\frac{1}{b'+1}\mathrm{P}_{eb}+\frac{1}{c'+1}\mathrm{P}_{ec}+\frac{1}{d'+1}\mathrm{P}_{ed}+\frac{1}{f'+1}\mathrm{P}_{ef}+\ldots\right)\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} = \frac{1}{a''+}$$

Cette expression est beaucoup trop compliquée pour qu'elle puisse avoir quelque utilité pratique.

V. — *Chevaux placés dans les deux ou trois premiers.*

Si l'on parie peu sur les chevaux placés seconds ou troisièmes, il est un genre de pari très fréquent, c'est celui que l'on fait sur les chevaux *placés*. Le preneur parie que le cheval qu'il désigne arrivera dans les deux premiers ou dans les trois premiers, sans préciser, du reste, l'ordre d'arrivée.

Prenons d'abord le cas d'un cheval placé dans les deux premiers. Nous pourrons facilement, d'après ce qui a été dit, examiner les conditions d'un pareil pari. La probabilité sera égale à la somme des probabilités pour que le cheval arrive premier et second, ou

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a'-1}.$$

On aura donc, en appelant a_1 la cote qu'il faudra prendre pour ce genre de pari et en remplaçant a' par la valeur précédemment obtenue,

$$(14) \qquad \frac{1}{a_1-1} = \frac{1}{a-1}\left(1+\sum\frac{\frac{1}{a-1}}{1+M-\frac{1}{a-1}} - \frac{\frac{1}{a-1}}{1+M-\frac{1}{a+1}}\right).$$

En faisant la somme de toutes les probabilités, on aurait

$$\sum\frac{1}{a_1-1} = \sum\frac{1}{a+1} + \sum\frac{1}{a'-1} = 2(1+M).$$

Le parieur qui fait son livre pour prendre ou donner tous les chevaux devra gagner ou perdre sur deux d'entre eux. Le chargement ou déchargement sera donc double de sa valeur pour le pari sur un cheval. L'opération serait donc plus avantageuse pour le parieur qui pourrait réussir à faire un livre complet.

Soient trois chevaux présentant les cotes 1, $1\frac{1}{2}$, 4 qui correspondent à un chargement de $0,10$. Ces cotes, pour les mêmes chevaux placés dans les deux premiers, deviendront

$$\frac{11}{100}, \quad \frac{21}{100}, \quad \frac{108}{100}.$$

Dans les courses importantes, on fait des paris sur les chevaux placés dans les trois premiers, quel que soit leur ordre d'arrivée. La probabilité de chaque cheval sera encore la somme des trois probabilités pour les trois places qu'il peut occuper. (*A suivre.*)