BENOIT

Note sur la décomposition d'une forme quadratique à m variables en une somme de $m - n$ carrés

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 30-36
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__30_1>

NOTE SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE FORME QUADRATIQUE A m VARIABLES EN UNE SOMME DE $m-n$ CARRÉS;

PAR M. BENOIT.

On sait que, pour exprimer qu'une forme quadratique à m variables peut se décomposer en une somme de $m-n$ carrés, il faut écrire que tous les déterminants mineurs de l'ordre $n-1$ de son discriminant sont nuls; mais les équations ainsi obtenues ne sont pas distinctes : je vais chercher quelles sont celles d'entre elles dont les autres sont des conséquences.

Soit d'abord le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ a_2^1 & \dots & \dots & a_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & \dots & \dots & a_m^m \end{vmatrix}.$$

Considérons l'un des mineurs de l'ordre n différent de zéro, soit

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{m-n} \\ a_2^1 & \dots & \dots & a_2^{m-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m-n}^1 & \dots & \dots & a_{m-n}^{m-n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

et formons le déterminant suivant

$$D_j^i = \begin{vmatrix} a_1^1 & .. & ... & a_1^{m-n} & a_1^i \\ .. & . & ... & .... & a_2^i \\ .. & .. & ... & ..... & .. \\ a_{m-n}^1 & .. & ... & a_{m-n}^{m-n} & a_{m-n}^i \\ a_j^1 & a_j^2 & ... & .... & a_j^i \end{vmatrix},$$

dans lequel i et j peuvent prendre les n valeurs $m-n+1, \ldots, m$.

Posons

$$D_j^{m-n+1} = 0, \quad D_j^{m-n+2} = 0, \quad \ldots, \quad D_j^m = 0.$$

Je dis qu'il résulte de ces équations que tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ formés au moyen des éléments des $m-n$ premières lignes et de la ligne de rang j sont nuls. En effet, désignons par $A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{m-n}^i, A_j^i$ les coefficients des éléments $a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{m-n}^i, a_j^i$ du développement de D_j^i par rapport à la dernière colonne, et soit

$$\begin{matrix} a_1^p \\ a_2^p \\ .. \\ a_{m-n}^p \\ a_j^p \end{matrix}$$

l'une quelconque des colonnes des déterminants en question, p pouvant prendre toutes les valeurs suivantes $1, 2, \ldots, m$. On aura, quel que soit p,

$$A_1^i a_1^p + A_2^i a_2^p + \ldots + A_{m-n}^i a_{m-n}^p + A_j^i a_j = 0;$$

car le premier membre de cette équation n'est autre chose que le déterminant D_j^i, où la dernière colonne est remplacée par celle que nous avons considérée plus haut. Pour les valeurs de p plus petites que $m-n$ ou égales à $m-n$, ce déterminant est nul, puisqu'il a deux colonnes identiques, et, pour les valeurs de p supérieures à $m-n$, il est encore nul, puisqu'il est alors égal au premier membre de l'une de nos équations.

Si maintenant nous donnons à p les $m-n+1$ valeurs correspondant aux rangs des colonnes de l'un quelconque des mineurs de l'ordre $n-1$ formés au moyen des éléments des $m-n$ premières lignes et de celle de rang j, nous obtiendrons $m-n+1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $m-n+1$ quantités $A_1^i, \ldots, A_{m-n}^i, A_j^i$ dont l'une au moins A_j^i, qui est égale à δ, est différente de zéro; leur déterminant, qui n'est autre chose que l'un des mineurs considérés, est donc nul. Ainsi donc tous ces mineurs sont nuls.

En donnant successivement à j les valeurs $m-n+1, \ldots, m$, on est amené à poser les n^2 équations suivantes

$$
(1)\quad \left\{\begin{array}{llll}
D_{m-n+1}^{m-n+1}=0, & D_{m-n+1}^{m-n+2}=0, & \ldots, & D_{m-n+1}^{m-n}=0, \\
D_{m-n+2}^{m-n+1}=0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & D_{m-n+2}^{m-n}=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
D_{m-n}^{m-n+1}=0, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & D_{m-n}^{m-n}=0,
\end{array}\right.
$$

et il en résulte que tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ formés des éléments des $m-n$ premières lignes auxquelles on joint successivement l'une quelconque des suivantes sont nuls.

En général, tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ sont nuls sans exception. Si, en effet, nous considérons l'une quelconque des combinaisons des m colonnes $m-n+1$ à $m-n+1$, les mineurs de l'ordre $n-1$ formés en prenant les $m-n$ premières lignes de ces colonnes successivement avec les suivantes sont nuls, ainsi que nous l'avons reconnu précédemment, et si, dans chaque combinaison des colonnes, l'un des mineurs de l'ordre n formé au moyen des éléments des $m-n$ premières lignes n'est pas nul, en raisonnant par rapport aux colonnes, comme nous l'avons fait par rapport aux lignes, nous démontrerons que, dans chaque combinaison des colonnes, tous les mineurs de l'ordre $n-1$ sont nuls; donc tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ sont nuls.

Examinons maintenant le cas où Δ est le discriminant d'une forme quadratique à m variables. Il est alors symétrique par rapport à la diagonale $a_1^1 a_m^m$; si l'un des mineurs de l'ordre n ayant ses éléments symétriquement disposés par rapport à cette diagonale n'est pas nul, on pourra l'amener à la place du déterminant δ sans détruire la symétrie. Celles des équations (1) qui sont symétriques par rapport à la diagonale $D_{m-n+1}^{m-n+1} D_{m-n}^{m-n}$ ont leurs premiers membres identiques à cause de la symétrie du déterminant Δ; ces équations se réduiront donc aux suivantes :

$$
\begin{array}{llll}
D_{m-n+1}^{m-n+1} = 0, & D_{m-n+1}^{m-n+2} = 0, & \ldots, & D_{m-n+1}^{m-n} = 0, \\
 & D_{m-n+2}^{m-n+2} = 0, & \ldots, & D_{m-n+2}^{m-n} = 0, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
 & & \ldots, & D_{m-n}^{m-n} = 0
\end{array}
$$

Leur nombre est égal à

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En vertu de ces équations, tous les mineurs de l'ordre $n-1$ de Δ seront nuls si, dans chacune des combinaisons des m colonnes $m-n+1$ à $m-n+1$, l'un des mineurs de l'ordre n compris dans les $m-n$ premières lignes n'est pas nul.

Prenons, comme exemple, le polynôme suivant

$$(A - S)x^2 + (A' - S)y^2 + (A'' - S)z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy;$$

il se décomposera en un carré si tous les mineurs du premier ordre de son discriminant sont nuls. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix}.$$

Soit $A - S \neq 0$; si, en outre, B'' ou B' n'est pas nul, soit $B'' \neq 0$; dans chaque combinaison des colonnes deux à deux, l'un des mineurs du second ordre compris dans la première ligne ne sera pas nul; les conditions sont alors

$$D_2^2 = 0, \qquad D_2^3 = 0, \qquad D_3^3 = 0$$

ou

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' \\ B'' & A' - S \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B' \\ B' & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

La deuxième équation montre que B et B' sont tous deux différents de zéro ou tous deux nuls; dans le premier cas, on tirera de cette équation la valeur de S, et, en la reportant dans les deux autres équations, on aura les conditions

$$S = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B} = A'' - \frac{BB'}{B''};$$

dans le deuxième cas, l'équation (3) donne $S = A''$, et l'équation (1) donne

$$\begin{vmatrix} A - A'' & B'' \\ B' & A' - A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Prenons encore comme exemple le polynôme

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z \\ + 2 B' x z + 2 B'' x y + 2 C x t + 2 C' y t + 2 C'' z t + D t^2;$$

on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Pour que le polynôme se décompose en une somme de deux carrés, il faut que tous les mineurs du premier ordre de Δ soient nuls. Soient

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} B' & C \\ B & C' \end{vmatrix} \neq 0;$$

alors, dans chaque combinaison des colonnes trois à trois, l'un des mineurs du second ordre compris dans les deux premières lignes n'est pas nul; les conditions seront donc

$$D_3^3 = 0, \qquad D_3^4 = 0, \qquad D_4^4 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que ce même polynôme soit décomposable en un carré, il faut que tous les mineurs du second ordre de Δ soient nuls.

Supposons qu'on ait $A \neq 0$, et qu'en même temps deux des autres éléments de la première ligne ne soient pas nuls, par exemple B'' et B'; alors, dans chaque combinaison des colonnes deux à deux, les mineurs du troisième ordre compris dans la première ligne ne sont pas tous nuls, et l'on a les conditions

$$D_2^2 = 0. \quad D_2^3 = 0, \quad D_2^4 = 0. \quad D_3^3 = 0, \quad D_3^4 = 0. \quad D_4^4 = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ B'' & C' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A & B' \\ B' & A'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ B' & C'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & C \\ C & D \end{vmatrix} = 0.$$