NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 305-327

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__305_0>

SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI ET D'EULER;

PAR M. E. CESARO.

I. — NOMBRES DE BERNOULLI.

1. Les nombres

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \tfrac{1}{6}, \quad B_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad B_6 = \tfrac{1}{42},$$
$$B_8 = -\tfrac{1}{30}, \quad \ldots, \quad B_1 = \tfrac{1}{2}, \quad B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \ldots = 0,$$

appelés *nombres de Bernoulli,* sont *définis* par l'égalité symbolique

$$(B + 1)^\nu - B^\nu = \nu \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

qui engendre, en vertu du théorème de Taylor, la relation symbolique générale

$$(1) \qquad f(x + B + 1) - f(x + B) = f'(x + 1).$$

On en déduit immédiatement la *formule sommatoire de Maclaurin*

$$(2) \quad f'(1) + f'(2) + f'(3) + \ldots + f'(n) = f(n + B) - f(B),$$

qui permet d'effectuer de très avantageuses transformations de séries, pourvu que l'on ait soin de considérer toujours des fonctions développables par la formule de Taylor, sans quoi on serait souvent conduit à des conclusions paradoxales. L'emploi de la formule (2) donne ordinairement lieu à des séries divergentes, qui, cependant, ne perdent leur convergence qu'à partir d'un certain terme, de sorte qu'on peut (¹) toujours les utiliser

(¹) « ... Aujourd'hui bien s'en faut qu'on approuve l'usage des séries non convergentes; au contraire, on veut qu'elles soient complètement bannies de l'Analyse. Mais cette rigueur, juste et raisonpour représenter, avec une certaine approximation, les sommes que l'on cherche à transformer. On sait que la recherche du *maximum* d'approximation a été l'objet de plusieurs travaux remarquables ([1]).

2. Une des plus intéressantes applications de la formule (2) est l'évaluation approchée de la *série de Lambert* ([2]). Rappelons d'abord que la formule (1) donne

$$e^{(B+1)x} - e^{Bx} = xe^{x};$$

d'où ([3])

$$(3)\qquad \frac{xe^{x}}{e^{x}-1} = e^{Bx} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!}\, x^{\nu},$$

ν étant la variable entière dans cette somme et dans toutes celles qui suivent. On en déduit, par intégration,

$$(4)\qquad \log \frac{xe^{x}}{e^{x}-1} = x - \sum_{1}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!}\,\frac{x^{\nu}}{\nu} = \frac{x}{2} - \sum_{1}^{\infty} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\,\frac{x^{2\nu}}{2\nu}.$$

---

nable en elle-même, a été mise à une bien dure épreuve par la série de Stirling. D'une part divergente, comme elle l'est, elle *devait*, en effet, être rejetée; d'autre part, parce qu'elle est presque indispensable, elle *ne peut point* l'être ... » (MALMSTEN, *Journal de Crelle*, p. 55; 1847.)

([1]) Consulter, pour certains cas particuliers, les recherches de Limbourg et de Chio, dans les Mémoires des Académies de Bruxelles et de Turin (1860 et 1870). Voir aussi la thèse de M. Bourguet, *Sur le calcul des intégrales eulériennes*. Du reste, le sujet dont il s'agit, traité depuis longtemps par Erchinger, d'une manière générale, a été repris par Lagrange, par Malmstén, par Poisson dans le Mémoire : *Sur le calcul numérique des intégrales définies*, et par beaucoup d'autres. Consulter aussi le travail de Dienger, *Ueber die Lagrangesche Summirungsformel* (*Crelle*, p. 75; 1846), et celui de Jacobi, *De usu legitimo formulæ summatoriæ Maclaurinianæ* (*Crelle*, t. 12, p. 263).

([2]) Question résolue par Schlomilch, dans une lettre adressée à Liouville (*Journal de Liouville*, p. 101; 1863).

([3]) Pour se convaincre que ces déductions sont parfaitement légitimes, consulter notre article : *Principes du calcul symbolique* (*Mathesis*, p. 10; 1883).

On sait, du reste, que la formule (3) en engendre une infinité d'autres, fort remarquables. Par exemple, le simple changement de x en $\frac{x}{2}\sqrt{-1}$ donne

$$(5)\qquad \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \cos(\mathrm{B}x) = 1 + \sum_1^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\mathrm{B}_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu}.$$

Ensuite, en tenant compte des identités

$$\cot\frac{x}{2} - \cot x = \operatorname{cos\acute{e}c} x, \qquad \cot x - 2\cot 2x = \operatorname{tang} x,$$

on obtient

$$(6)\qquad \frac{x}{\sin x} = 1 - \sum_1^{\infty}(-1)^{\nu}(2^{2\nu}-2)\frac{\mathrm{B}_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu},$$

$$(7)\qquad \operatorname{tang} x = \sum_1^{\infty}(-1)^{\nu-1}4^{\nu}(4^{\nu}-1)\frac{\mathrm{B}_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu-1};$$

. . . .

3. Cela posé, appliquons la formule (2) à la série dont le terme général est

$$f(n) = \frac{1}{n} - \frac{x^n}{1-x^n}\log\frac{1}{x} \qquad (\mathrm{mod}\, x < 1).$$

Nous obtenons immédiatement

$$\sum_1^n\left(\frac{1}{\nu} - \frac{x^{\nu}}{1-x^{\nu}}\log\frac{1}{x}\right) = \log\frac{n+\mathrm{B}}{1-x^{n+\mathrm{B}}} - \log\frac{\mathrm{B}}{1-x^{\mathrm{B}}}.$$

En particulier, pour $x = 0$, nous trouvons la formule connue

$$\sum_1^n\frac{1}{\nu} = \log(n+\mathrm{B}) - \log\mathrm{B} = \mathrm{C} + \log n + \frac{1}{2n} - \sum_1^{\infty}\frac{\mathrm{B}_{2\nu}}{2\nu\, n^{2\nu}},$$

où C désigne la *constante d'Euler*, 0,5772..., symboliquement représentée par $-\log\mathrm{B}$. Soustrayons membre à membre les deux dernières égalités, puis faisons croître n indéfiniment, en posant $x = e^{-t}$. Il vient

$$\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \frac{C-\log t}{t} - \frac{1}{t}\log\frac{Bte^{Bt}}{e^{Bt}-1}$$

ou bien, en ayant égard à (4),

$$\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \frac{C-\log t}{t} + \frac{1}{4} - \sum_1^\infty \frac{B_{2\nu}^2}{(2\nu)!\,2\nu}\, t^{2\nu-1},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4} + \ldots \\ &= \frac{C - \log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}} + \frac{1}{4} - \frac{\log\frac{1}{x}}{144} - \frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^3}{86400} - \frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^5}{7620480} - \ldots\end{aligned}$$ [1]

4. La théorie de la décomposition des fractions rationnelles montre que, si l'on pose

$$f(x) = (1-a_1x)(1-a_2x)(1-a_3x)(1-a_4x)\ldots,$$

les nombres a étant différents entre eux, le coefficient A_p de x^p, dans le développement de $\frac{1}{f(x)}$, est [2]

$$(8)\qquad A_p = -\left[\frac{a_1^{p+1}}{f'\left(\frac{1}{a_1}\right)} + \frac{a_2^{p+1}}{f'\left(\frac{1}{a_2}\right)} + \frac{a_3^{p+1}}{f'\left(\frac{1}{a_3}\right)} + \ldots\right].$$

Or, en vertu d'une formule d'Euler, que l'on sait éta-

(¹) Schlömilch fait remarquer que cette formule est surtout avantageuse pour les valeurs de x très voisines de l'unité, c'est-à-dire précisément dans le cas où la *transformation de Clausen* ne pourrait être employée avec fruit.

(²) Voir par exemple le *Cours d'Analyse* de M. Catalan, p. 318.

blir élémentairement (¹), on peut prendre

$$a_\nu = \frac{1}{\nu^2}, \qquad f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}},$$

tandis que, d'autre part, l'égalité (6) donne

$$\frac{\pi\sqrt{x}}{\sin(\pi\sqrt{x})} = 2\cos(B\pi\sqrt{x}) - \cos(2B\pi\sqrt{x});$$

d'où

$$A_p = (-1)^{p-1}\frac{(2^{2p}-2)B_{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}.$$

Par suite, la formule (8) devient

$$\frac{1}{1^{2p}} - \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} - \frac{1}{4^{2p}} + \ldots = (-1)^{p-1}\frac{(2^{2p-1}-1)B_{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}.$$

On en déduit immédiatement

$$(9) \qquad \frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \ldots = (-1)^{p-1}\frac{2^{2p-1}B_{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}.$$

II. — Nombres d'Euler.

5. *Les nombres d'Euler*

$$E_0 = 1, \qquad E_2 = -1, \qquad E_4 = 5, \qquad E_6 = -61,$$
$$E_8 = 1385, \qquad \ldots, \qquad E_1 = E_3 = E_5 = E_7 = E_9 = \ldots = 0,$$

définis par l'égalité symbolique

$$(E+1)^\nu + (E-1)^\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots),$$

obéissent à la relation symbolique, plus générale,

$$(10) \qquad f(x+E+1) + f(x+E-1) = 2f(x);$$

(¹) La démonstration la plus directe est fournie par la théorie des fonctions holomorphes (*Cours* de M. Hermite, p. 70). Au point de vue de ce qui va suivre, il importe seulement que l'on sache démontrer la formule d'Euler sans recourir aux intégrales définies.

d'où l'on déduit

$$(11)\quad f(1)-f(3)+f(5)-\ldots\mp f(2n-1)=\tfrac{1}{2}[f(\mathrm{E})\pm f(\mathrm{E}+2n)].$$

Afin d'appliquer cette formule au cas de

$$f(n)=\frac{x^n}{1+x^{2n}},$$

remarquons d'abord que la relation (10) donne, en particulier,

$$(12)\qquad \frac{2}{e^x-e^{-x}}=e^{\mathrm{E}x}=1+\sum_1^{\infty}\frac{\mathrm{E}_{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu}.$$

Cela étant, le second membre de (11) devient, pour n infini et $x=e^{-t}$,

$$\frac{1}{2(e^{\mathrm{E}t}+e^{-\mathrm{E}t})}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sum_1^{\infty}\frac{\mathrm{E}_{2\nu}^2}{(2\nu)!}t^{2\nu},$$

pourvu que l'on ait égard à (12). On a donc

$$\frac{x}{1+x^2}-\frac{x^3}{1+x^6}+\frac{x^5}{1+x^{10}}-\frac{x^7}{1+x^{14}}+\ldots$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\log\frac{1}{x}\right)^2-\frac{25}{96}\left(\log\frac{1}{x}\right)^4+\frac{3721}{2880}\left(\log\frac{1}{x}\right)^6-\ldots.$$

6. On a, de même,

$$(13)\quad \begin{cases}\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{3x^3}{1-x^3}+\ldots\pm\dfrac{(2n-1)x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}\\[2ex] =\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{E}x^{\mathrm{E}}}{1-x^{\mathrm{E}}}\pm\dfrac{(\mathrm{E}+2n)x^{\mathrm{E}+2n}}{1-x^{\mathrm{E}+2n}}\right].\end{cases}$$

Or il est clair, en vertu de (3), que

$$\frac{\mathrm{E}t}{e^{\mathrm{E}t}-1}=1+\sum_1^{\infty}\frac{\mathrm{B}_{2\nu}\mathrm{E}_{2\nu}}{(2\nu)!}t^{2\nu}.$$

D'après cela, le second membre de (13) devient

$$\frac{1}{2\log\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{\mathrm{B}_{2\nu}\mathrm{E}_{2\nu}}{(2\nu)!}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\nu-1},$$

lorsque n croît sans limite. Conséquemment,

$$\frac{x}{1-x} - \frac{3x^3}{1-x^3} - \frac{5x^5}{1-x^5} - \frac{7x^7}{1-x^7} - \cdots$$
$$= \frac{1}{2\log\frac{1}{x}} - \frac{1}{24}\log\frac{1}{x} - \frac{1}{288}\left(\log\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{61}{60480}\left(\log\frac{1}{x}\right)^5 - \cdots.$$

7. Il vaudrait peut-être mieux substituer, aux nombres d'Euler, les nombres E' définis par l'égalité symbolique

$$(E'+1)^\nu + (E'-1)^\nu = 2 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

On trouve, de proche en proche,

$$E'_0 = 1, \qquad E'_2 = E'_4 = E'_6 = E'_8 = \ldots = 0,$$
$$E'_1 = 1, \quad E'_3 = -2, \quad E'_5 = 16, \quad E'_7 = -272, \quad E'_9 = 7936, \quad \ldots.$$

Ces nombres forment, pour ainsi dire, un trait d'union entre les séries des nombres B et E. On a, d'une part,

$$E'_p = \frac{2^{p+1}(2^{p+1}-1)}{p+1} B_{p+1}.$$

D'autre part, on démontre sans peine que

$$E'_p = -\Delta^p(E_0), \qquad E_p = \Delta^p(E'_0).$$

Pour arriver à ces résultats, il suffit de remarquer, d'une manière générale, que les nombres ε et les nombres β, définis respectivement par les égalités

$$(\varepsilon+1)^\nu + (\varepsilon-1)^\nu = 2u_\nu, \qquad (\beta+1)^\nu - \beta^\nu = \nu u_{\nu-1},$$

sont donnés par les formules symboliques

$$\varepsilon_p = (E+u)^p, \qquad \beta_p = (B+u-1)^p.$$

Afin de ne pas donner lieu à des malentendus [1], nous

---

[1] Si nous ne nous sommes pas laissé guider par la même considération, en ce qui concerne les nombres de Bernoulli, c'est que déjà

continuerons à appeler *nombres d'Euler* les nombres E, tels qu'ils ont été définis en commençant.

8. Remarquons enfin que, d'après un corollaire de la formule d'Euler, citée au n° 4, il est permis de prendre, dans (8),

$$a_\nu = \frac{1}{(2\nu-1)^2}, \qquad f(x) = \cos\frac{\pi\sqrt{x}}{2},$$

tandis que, d'autre part, en vertu des développements qui précèdent, on a

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi\sqrt{x}}{2}} = \cos\left(\frac{E\pi}{2}\sqrt{x}\right);$$

d'où

$$A_p = (-1)^p \frac{E_{2p}}{(2p)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p}.$$

La formule (8) devient donc

$$(14)\qquad 1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} + \frac{1}{7^{2p+1}} + \ldots = (-1)^p \frac{E_{2p}}{(2p)!}\,\frac{\pi^{2p+1}}{4^{p+1}}.$$

III. — Nombres ultra-bernoulliens.

9. *Les nombres ultra-bernoulliens* (¹) sont définis par l'égalité symbolique

$$(\mathfrak{B}+1)^\nu - a\mathfrak{B}^\nu = \nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

a étant une constante. On ne retrouve pas, pour $a = 1$, les nombres de Bernoulli, parce que la valeur initiale $\mathfrak{B}_0$

---

trois définitions (Serret, Lacroix, Lucas) avaient été proposées, présentant toutes quelque défaut au point de vue de certaines exigences du calcul symbolique.

(¹) Ainsi appelés par Trudi (*Atti dell' Accademia di Napoli*, 1865).

diffère nécessairement de $B_0 = 1$. On a, en effet,

$$(1-a)\mathfrak{B}_0 = 0;$$

d'où

$$\mathfrak{B}_0 = 0 \quad \text{si} \quad a \gtrless 1.$$

On obtient ensuite, de proche en proche,

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{1-a}, \qquad \mathfrak{B}_3 = \frac{3a(1+a)}{(1-a)^3}, \qquad \ldots,$$

$$\mathfrak{B}_2 = -\frac{2a}{(1-a)^2}, \qquad \mathfrak{B}_5 = -\frac{4a(1+4a+a^2)}{(1-a)^4}, \qquad \ldots.$$

Il est évident que l'égalité de définition est un cas particulier de l'identité symbolique générale

$$(15) \qquad f(x+\mathfrak{B}+1) - af(x+\mathfrak{B}) = f'(x+1),$$

qui engendre, à son tour, la formule

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & zf'(1) + z^2f'(2) + z^3f'(3) + \ldots + z^nf'(n) \\ & \quad = z^nf(n+\mathfrak{B}) - f(\mathfrak{B}), \end{aligned} \right.$$

z étant l'inverse de a.

10. Soit, par exemple, $f'(x) = x^{p-1}$. Il vient

$$\begin{aligned} & 1^{p-1}z - 2^{p-1}z^2 + 3^{p-1}z^3 + \ldots + n^{p-1}z^n \\ & \quad = \frac{1}{p}[z^n(n+\mathfrak{B})^p - \mathfrak{B}^p]. \end{aligned}$$

Puis, pour n indéfiniment croissant, et $\bmod z < 1$, on voit que la signification des nombres ultra-bernoulliens est établie par l'égalité

$$(17) \qquad \mathfrak{B}_p = -p(1^{p-1}z + 2^{p-1}z^2 + 3^{p-1}z^3 - 4^{p-1}z^4 + \ldots)\ (^1),$$

qui pourrait servir à généraliser encore la notion des nombres $\mathfrak{B}$, en supposant que ceux-ci soient des fonctions de la variable *continue* p. Mais on peut donner, des

---

(1) Ces séries ont été étudiées par M. Catalan, dans le Mémoire : *Sur une suite de polynômes entiers* (Académie de Belgique, 1880).

mêmes nombres, une autre interprétation. On déduit, en effet, de l'identité (15)

$$(18) \qquad \frac{x e^x}{e^x - a} = e^{\mathfrak{B} x} = \sum_1^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\nu!} x^\nu.$$

Cette propriété a été prise comme définition par Trudi ([1]). L'emploi des imaginaires donne lieu aux développements

$$(19) \qquad \frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_0^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mathfrak{B}_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} x^{2\nu},$$

$$\frac{a \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mathfrak{B}_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1},$$

et à une foule d'autres, dont quelques-uns ont une certaine importance en Astronomie. Voici encore une conséquence de l'égalité (18). On a

$$(1+t)^{\mathfrak{B}} = e^{\mathfrak{B}\log(1+t)} = \frac{\log(1+t)}{1 - \dfrac{a}{1+t}},$$

d'où, en égalant les coefficients de t^p dans les développements des deux membres,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{B}(\mathfrak{B}-1)(\mathfrak{B}-2)\ldots(\mathfrak{B}-p+1) \\ &= (-1)^{p+1} p! \left\{ \frac{1}{p} + \frac{a}{(1-a)^{p+1}} \left[\frac{1-a}{1} - \frac{(1-a)^2}{2} + \ldots \pm \frac{(1-a)^p}{p} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Cette formule n'est pas applicable au cas de $a = 1$. On trouve, du reste, par un procédé analogue,

$$B(B-1)(B-2)\ldots(B-p+1) = (-1)^{p+1} \frac{(p-1)!}{p+1}.$$

([1]) Il est vrai que les nombres ultra-bernoulliens de Trudi diffèrent quelque peu des nôtres. La *fonction generale* adoptee par Trudi est, en effet, $\dfrac{1}{1 - ae^x}$.

11. Les nombres $\mathfrak{B}$ sont, en définitive, des fonctions de z. On a, en particulier,

$$\mathfrak{B}_p(1) = B_p, \qquad \mathfrak{B}_p(-1) = (2^p - 1)B_p.$$

La dernière égalité est un cas particulier de la relation

$$\mathfrak{B}_p(z) + \mathfrak{B}_p(-z) = 2^p \mathfrak{B}_p(z^2),$$

que l'on déduit aisément de la formule (17). Parmi tous les nombres ultra-bernoulliens, ceux qui répondent à l'hypothèse $z = -1$ sont tout aussi remarquables que les nombres de Bernoulli. En les doublant, on obtient une suite de nombres entiers 0, 1, 1, 0, -1, 0, 3, 0, -17, ..., étroitement liés aux nombres d'Euler; car, à cause de

$$\frac{x e^x}{e^x + 1} = e^{x\mathfrak{B}(-1)}, \qquad \frac{2}{e^x + e^{-x}} = e^{Ex},$$

on a

$$e^{2x\mathfrak{B}(-1)} = x e^{(E+1)x};$$

d'où

$$\mathfrak{B}_p(-1) = \frac{p}{2}\left(\frac{E+1}{2}\right)^{p-1}.$$

12. Il est possible d'exprimer les nombres $\mathfrak{B}$, en fonction de z, sous forme finie. Posons, à cet effet,

$$u_\nu = \nu^{p-1}, \qquad \Delta_\nu = \Delta^\nu(0^{p-1}).$$

La formule (17) devient

$$-\frac{\mathfrak{B}_p(z)}{p} = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \dots.$$

Or le second membre est symboliquement égal à

$$\frac{1}{1 - uz} = \frac{1}{1 - z - z\Delta} = \frac{\Delta_0}{1-z} + \frac{z\Delta_1}{(1-z)^2} + \frac{z^2\Delta_2}{(1-z)^3} + \dots.$$

En conséquence,

$$\mathfrak{B}_p(z) = -p\left[\frac{z\Delta(0^{p-1})}{(1-z)^2} + \frac{z^2\Delta^2(0^{p-1})}{(1-z)^3} + \frac{z^3\Delta^3(0^{p-1})}{(1-z)^4} + \dots\right].$$

Si, par exemple, $z = -1$, on trouve

$$B_p = \frac{p}{2^p - 1}\left[\frac{\Delta(0^{p-1})}{2^2} - \frac{\Delta^2(0^{p-1})}{2^3} + \frac{\Delta^3(0^{p-1})}{2^4} - \ldots\right].$$

13. Pour une forme *donnée* de la fonction f, la relation (16) peut être considérée comme une généralisation de (2). Au lieu d'employer la première de ces formules, nous préférons appliquer la formule (2) à la transformation de certaines séries, plus générales que celle de Lambert. On a

$$\left(\log\frac{1}{x}\right)\sum_{1}^{n}\frac{ax^\nu}{1 - ax^\nu} = \log\frac{1}{1 - ax^{\mathrm{B}}} - \log\frac{1}{1 - ax^{n+\mathrm{B}}}.$$

Donc, pour n indéfiniment croissant et $x = e^{-t}$,

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{ax^\nu}{1 - ax^\nu} = \frac{1}{t}\log\frac{e^{\mathrm{B}t}}{e^{\mathrm{B}t} - a}.$$

Or il est facile de voir que

$$\log\frac{e^x}{e^x - a} = \log\frac{1}{1 - a} + x - \sum_{1}^{\infty}\frac{\mathfrak{B}_\nu}{\nu!}\,\frac{x^\nu}{\nu}.$$

Par conséquent,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{1}^{\infty}\frac{ax^\nu}{1 - ax^\nu} &= \sum_{1}^{\infty}\frac{a^\nu x^\nu}{1 - x^\nu}\\ &= \frac{\log\dfrac{1}{1-a}}{\log\dfrac{1}{x}} - \frac{a}{2(1-a)} - \sum_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{B}_{2\nu}\mathfrak{B}_{2\nu}}{(2\nu)!\,2\nu}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\nu-1}.\end{aligned}\right.$$

En particulier,

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{x^\nu}{1 + x^\nu} = \frac{\log 2}{\log\dfrac{1}{x}} - \frac{1}{4} + \sum_{1}^{\infty}\frac{(4^\nu - 1)\mathrm{B}_{2\nu}^2}{(2\nu)!\,2\nu}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2\nu-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}+\frac{x^4}{1+x^4}+\cdots$$
$$=\frac{\log 2}{\log\frac{1}{x}}-\frac{1}{4}+\frac{\log\frac{1}{x}}{48}+\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^3}{5760}+\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^5}{120960}+\cdots.$$

On obtiendrait des résultats plus généraux en faisant usage de la formule (16).

14. Il y a une liaison simple entre deux séries quelconques de nombres ultra-bernoulliens. Soit, en effet, $1 = az = \alpha\zeta$. On a

$$e^{x\,\mathfrak{B}(z)}=\frac{x e^x}{e^x-a}=\frac{x e^{x+\log\frac{\alpha}{a}}}{e^{x+\log\frac{\alpha}{a}}-\alpha}=\frac{x}{x+\log\frac{z}{\zeta}}\,e^{\left(x+\log\frac{z}{\zeta}\right)\mathfrak{B}(\zeta)};$$

d'où, en égalant les coefficients de x^p dans les deux membres,

$$\frac{\mathfrak{B}_p(z)}{p}=\sum_0^\infty\frac{\mathfrak{B}_{p+\nu}(\zeta)}{p+\nu}\,\frac{\left(\log\frac{z}{\zeta}\right)^\nu}{\nu!}.$$

En particulier,

$$\frac{\mathfrak{B}_p(-z)}{p}=\sum_0^\infty\frac{(2^{p+\nu}-1)B_{p+\nu}}{\nu!\,(p+\nu)}(\log z)^\nu. \tag{21}$$

C'est ainsi que tout nombre ultra-bernoullien peut être représenté au moyen des nombres de Bernoulli, proprement dits.

IV. — Nombres ultra-eulériens.

15. *Les nombres ultra-eulériens* sont définis par l'égalité symbolique

$$(\mathfrak{E}+1)^\nu+a(\mathfrak{E}-1)^\nu=0\qquad(\nu=1,2,3,4,5,\ldots$$

avec la condition initiale $\mathfrak{E}_0 = 1$, sauf pour $a = -1$. On a, plus généralement,

$$(22)\qquad f(x+\mathfrak{E}+1) + af(x+\mathfrak{E}-1) = (1+a)f(x);$$

d'où l'on tire

$$(23)\qquad \frac{1+a}{e^x + ae^{-x}} = e^{\mathfrak{E}x} = 1 + \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{E}_\nu}{\nu!} x^\nu.$$

La forme (22) donne, en outre,

$$f(1) - zf(3) + z^2 f(5) - \ldots \pm z^{n-1} f(2n-1)$$
$$= \frac{f(\mathfrak{E}) \pm z^n f(\mathfrak{E}+2n)}{1+z},$$

z étant l'inverse de a. On en déduit

$$(24)\qquad \mathfrak{E}_p(z) = (1+z)[1^p - 3^p z + 5^p z^2 - 7^p z^3 + \ldots].$$

Au moyen de cette égalité, on généralise davantage la notion des nombres d'Euler : il faut supposer, dans ce but, que les quantités $\mathfrak{E}$ soient des fonctions des variables continues p et z.

16. Afin de représenter les nombres ultra-eulériens sous forme finie, soit, pour un instant,

$$u_\nu = \nu^p, \qquad \Delta_\nu = \Delta^\nu(0^p),$$

et remarquons que la formule (24) devient, symboliquement,

$$\mathfrak{E}_p(z) = \frac{(1+z)u}{1+u^2 z} = \frac{1+z}{z} \, \frac{1+\Delta}{\frac{1+z}{z} + 2\Delta + \Delta^2}.$$

En vertu d'un développement connu, on peut donc écrire

$$\mathfrak{E}_p(z) = \sum_1^p (-1)^\nu \cos^{\nu-1}\theta . \cos(\nu+1)\theta . \Delta^\nu(0^p),$$

en posant $z = \cot^2\theta$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_p(z) = & -\cos 2\theta . \Delta(0^p) + \cos\theta \cos 3\theta . \Delta^2(0^p) \\ & - \cos^2\theta \cos 4\theta . \Delta^3(0^p) + \cos^3\theta \cos 5\theta . \Delta^4(0^p) \\ & - \cos^4\theta \cos 6\theta . \Delta^5(0^p) + \ldots .\end{aligned}$$

En particulier, nous pouvons faire $\theta = \frac{\pi}{4}$, et nous trouvons la formule connue ([1])

$$\begin{aligned}E_p = & -\frac{1}{4}\left[2\Delta^2(0^p) - 2\Delta^3(0^p) + \Delta^4(0^p)\right] \\ & + \frac{1}{4^2}\left[2\Delta^6(0^p) - 2\Delta^7(0^p) + \Delta^8(0^p)\right] \\ & - \frac{1}{4^3}\left[2\Delta^{10}(0^p) - 2\Delta^{11}(0^p) + \Delta^{12}(0^p)\right] + \ldots .\end{aligned}$$

17. Il est utile de considérer les nombres $\mathfrak{E}$ comme des fonctions de

$$\mu = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

On trouve facilement

$$\begin{aligned}&\mathfrak{E}_1 = \mu, & &\mathfrak{E}_4 = 24\mu^4 - 28\mu^2 + 5,\\ &\mathfrak{E}_2 = 2\mu^2 - 1, & &\mathfrak{E}_5 = 120\mu^5 - 180\mu^3 + 61\mu,\\ &\mathfrak{E}_3 = 6\mu^3 - 5\mu, & &\mathfrak{E}_6 = 720\mu^6 - 1320\mu^4 + 622\mu^2 - 61,\end{aligned}$$

. . . .

Ces polynômes jouissent de propriétés remarquables, dont nous parlerons une autre fois. Ici, observons seulement que le changement de z en $\frac{1}{z}$ entraîne le changement de μ en $-\mu$, et que, par suite,

$$\mathfrak{E}_p\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^p \mathfrak{E}_p(z).$$

Les ultra-bernoulliens possèdent la même propriété, pourvu que p diffère de l'unité. Cette remarque pourrait

---

([1]) *Nouvelles Annales*, p. 4[illegible]; 1885.

servir à transformer les intégrales définies, que l'on rencontrera plus loin.

18. Il est évident que les nombres $\mathfrak{E}$ sont des combinaisons simples de nombres ultra-bernoulliens; car

$$(25)\qquad \mathfrak{E}_{p-1}(-z) = \frac{1-z}{2p\sqrt{z}}\left[\mathfrak{B}_p(-\sqrt{z}) - \mathfrak{B}_p(\sqrt{z})\right].$$

En particulier,

$$E_{p-1} = \frac{2^p(2^p-1)B_p - 2\mathfrak{B}_p(\sqrt{-1})}{p\sqrt{-1}}.$$

On démontre facilement cette autre formule

$$(26)\qquad \mathfrak{B}_p(-z) = \frac{pz}{1+z}\left[\frac{\mathfrak{E}(z)+1}{2}\right]^{p-1},$$

qui établit une liaison remarquable, au point de vue du calcul des différences, entre les systèmes des nombres $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{E}$. On reste parfaitement convaincu de l'extrême importance de tous ces nombres lorsqu'on cherche à résoudre certaines questions capitales de l'*Analyse partitive* (¹), que nous nous proposons de traiter à fond dans une prochaine *Note*.

19. On rencontre les mêmes nombres dans des questions d'Astronomie. L'ascension droite y du Soleil est donnée, en fonction de la longitude x, par l'équation

$$(27)\qquad \operatorname{tang} y = \mu \operatorname{tang} x,$$

où $\mu = \cos\omega$, ω étant l'obliquité de l'écliptique. L'équa-

---

(¹) Il y a, sur le sujet auquel nous faisons allusion, des travaux de Sylvester, Brioschi, Battaglini, etc. Lisez, dans les *Atti* de l'Académie de Naples (1865), un important Mémoire de Trudi, *Sur la partition des nombres*.

tion (23) se dédouble en

$$\cos(\mathfrak{E}x) = \frac{\cos x}{\cos^2 x + \mu^2 \sin^2 x},$$

$$\sin(\mathfrak{E}x) = \frac{\mu \sin x}{\cos^2 x + \mu^2 \sin^2 x},$$

après substitution de $x\sqrt{-1}$ à x. Cela étant, on trouve, en dérivant (27),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{\cos^2 x + \mu^2 \sin^2 x} = \mu \cos x \cos(\mathfrak{E}x) + \sin x \sin(\mathfrak{E}x)$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu+1}{2}\cos[(\mathfrak{E}-1)x] + \frac{\mu-1}{2}\cos[(\mathfrak{E}-1)x].$$

D'autre part, la formule (22) donne

$$\frac{\mu+1}{2}\cos[(\mathfrak{E}-1)x] - \frac{\mu-1}{2}\cos[(\mathfrak{E}+1)x] = 1.$$

Par suite,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + (\mu - 1)\cos[(\mathfrak{E}+1)x].$$

Ici nous pouvons introduire les nombres $\mathfrak{B}$, au moyen de la formule (26), et nous trouvons, après intégration,

$$y = x + \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\mathfrak{B}_{2\nu-1}\left(-\tang^2 \frac{\omega}{2}\right)}{(2\nu-1)!\,(2\nu-1)} (2x)^{2\nu-1}.$$

Si l'on ordonnait le second membre par rapport aux puissances de $\tang \frac{\omega}{2}$, en tenant compte de l'égalité (17), on obtiendrait la formule de Lagrange, exprimant la *réduction à l'équateur*.

V. — Intégrales définies.

20. Il est presque évident que, si l'on pose

$$F(x) = a_1 f(x) + a_2 f(2x) + a_3 f(3x) + \ldots,$$

on a

$$(28)\qquad \frac{a_1}{1^x} + \frac{a_2}{2^x} + \frac{a_3}{3^x} + \ldots = \frac{\int_0^\infty \varphi^{x-1} F(\varphi)\, d\varphi}{\int_0^\infty \varphi^{x-1} f(\varphi)\, d\varphi} \quad [1].$$

En particulier, si l'on fait $f(x) = e^{-x}$, en supposant successivement $a_\nu = 1$, $a_\nu = \frac{1}{2}[1 - (-1)^\nu]$, on peut exprimer la somme qui figure dans le premier membre de (9), puis cette somme, dans laquelle on néglige les termes de rang pair. On parvient ainsi aux relations

$$(29)\qquad (-1)^{p-1} \frac{B_{2p}}{2p} = 2\int_0^\infty \frac{\varphi^{2p-1}\, d\varphi}{e^{2\pi\varphi} - 1},$$

$$(30)\qquad (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p}(-1)}{2p} = 2\int_0^\infty \frac{\varphi^{2p-1}\, d\varphi}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}},$$

dont la première est la *formule de Plana*. De même, en utilisant l'égalité (14), on obtient

$$(-1)^p E_{2p} = 2\int_0^\infty \frac{\varphi^{2p}\, d\varphi}{e^{\frac{\pi\varphi}{2}} + e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}}.$$

21. La formule (30) peut être généralisée au moyen de (21). On trouve

$$(31)\qquad (-1)^{p-1} \frac{\mathfrak{B}_{2p}(-z)}{2p} = 2\int_0^\infty \frac{\varphi^{2p-1} \cos(\varphi \log z)}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi,$$

$$(32)\qquad (-1)^p \frac{\mathfrak{B}_{2p+1}(-z)}{2p+1} = 2\int_0^\infty \frac{\varphi^{2p} \sin(\varphi \log z)}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi.$$

---

[1] Cette formule est susceptible d'être généralisée, et elle devient alors d'une fécondité extrême. Nous en ferons, sous peu, quelques applications à la *Théorie des nombres*.

p étant positif. Si, dans la dernière formule, on veut faire $p = 0$, on doit ajouter $\frac{1}{2}$ au second membre. On obtient, dans ce cas particulier, la formule connue

$$(33) \qquad \frac{e^t - 1}{e^t + 1} = 4\int_0^\infty \frac{\sin(\varphi t)}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi.$$

On tire encore, de la relation (25),

$$(-1)^p \mathfrak{E}_{2p}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p} \cos\frac{\varphi \log z}{2}}{e^{\frac{\pi\varphi}{2}} + e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}}\, d\varphi,$$

$$(-1)^{p-1} \mathfrak{E}_{2p+1}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^\infty \frac{\varphi^{2p+1} \sin\frac{\varphi \log z}{2}}{e^{\frac{\pi\varphi}{2}} + e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}}\, d\varphi.$$

Enfin, il est évident que toutes ces relations sont renfermées dans la formule symbolique générale

$$\begin{aligned} z f(1) &+ z^2 f(2) + z^3 f(3) + \ldots \\ &= \tfrac{1}{2} f(0) + \int_0^\infty \frac{\sin[(X - \log z)\varphi]}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi, \end{aligned}$$

dans laquelle on suppose que e^{Xx} soit l'expression symbolique de $f(x)$. On obtient cette dernière formule en portant les valeurs (31) et (32) dans la relation (16), et en supposant $\operatorname{mod} z < 1$, pour n indéfiniment croissant [1].

22. Toutes ces formules pourraient nous fournir les valeurs d'une infinité d'intégrales définies, plus ou moins intéressantes. Il suffirait de remplacer les nombres $\mathfrak{B}$ et les nombres $\mathfrak{E}$ par leurs expressions dans

---

[1] Bien entendu, la fonction f doit être telle que, pour n infini, $z^n f(n + \theta)$ tende vers *zéro* : cela constitue un ensemble de conditions, qui n'est pas toujours vérifié.

tous les développements qui précèdent. C'est ainsi que les formules (5) et (7) donnent

$$\frac{1}{x} - \cot x = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\varphi x} - e^{-2\varphi x}}{e^{2\pi\varphi} - 1}\, d\varphi,$$

$$\tang x = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\varphi x} - e^{-2\varphi x}}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi \quad (^1),$$

pourvu que l'on tienne compte respectivement des formules (29) et (30). On trouve encore

$$\text{séc}\, x = \int_0^\infty \frac{e^{\varphi x} + e^{-\varphi x}}{e^{\frac{\pi\varphi}{2}} + e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}}\, d\varphi;$$

. . . .

De même, la formule (19) devient, en y posant $a = e^{-t}$,

$$(34) \qquad \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + 2\cos x + e^{-t}} = 2\int_0^\infty \frac{e^{\varphi x} + e^{-\varphi x}}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}} \sin(\varphi t)\, d\varphi.$$

Cette intégrale a été signalée par Poisson [2] : elle comprend (33) comme cas particulier.

23. Remarquons, enfin, que la formule (28) donne naissance à un grand nombre d'autres intégrales définies. On en déduit, par exemple,

$$\mathfrak{B}_{p-x}(z) = \frac{p-x}{p\Gamma(x)} \int_0^\infty \varphi^{x-1} \mathfrak{B}_p(z e^{-2\varphi})\, d\varphi.$$

De même,

$$\mathfrak{C}_{p-x}(z) = \frac{1+z}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{\varphi^{x-1} \mathfrak{C}_p(z e^{-2\varphi})}{e^{\varphi} + z e^{-\varphi}}\, d\varphi :$$

---

(1) Ces intégrales sont fort connues : on les emploie, habituellement, pour démontrer la *formule de Plana,* en suivant une voie inverse de celle que nous venons de tracer.

(2) *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIIe Cahier, p. 297.

en particulier,

$$\mathrm{E}_{p,x} = \frac{2}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{\varphi^{x-1}\,\mathfrak{E}_p(e^{-2\varphi})}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}\,d\varphi.$$

Plus généralement, les valeurs des intégrales multiples

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi_1^{x_1-1}\varphi_2^{x_2-1}\ldots\varphi_n^{x_n-1}\,\mathfrak{B}_{p+x}(z e^{-\varphi})\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_n,$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi_1^{x_1-1}\varphi_2^{x_2-1}\ldots\varphi_n^{x_n-1}\,\frac{\mathfrak{E}_{p+x}(z e^{-2\varphi})}{e^{\varphi}+z e^{-\varphi}}\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_n,$$

où

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n,$$

sont respectivement

$$(p+x)\,\Gamma(x_1)\,\Gamma(x_2)\ldots\Gamma(x_n)\,\frac{\mathfrak{B}_p(z)}{p},$$

$$\frac{\Gamma(x_1)\,\Gamma(x_2)\ldots\Gamma(x_n)}{1-z}\,\mathfrak{E}_p(z);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

24. L'application des formules précédentes, aux suites qui ont pour type la série de Lambert, présente aussi beaucoup d'intérêt, au point de vue de la théorie des nombres. Ici nous nous bornons à signaler, en premier lieu, la formule

$$\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \frac{C - \log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}} + \frac{1}{4} + \int_0^\infty \left[\cot\left(\frac{\varphi}{2}\log\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{\varphi\log\frac{1}{x}}\right]\frac{d\varphi}{e^{2\pi\varphi}-1},$$

que l'on établit à l'aide des développements du n° 2. On sait que des résultats de ce genre ont été obtenus par divers géomètres ([1]), qui espéraient arriver, par là, à exprimer analytiquement la *loi des nombres premiers*. On a aussi

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+x^6} + \frac{x^5}{1+x^{10}} - \ldots = \int_0^\infty \frac{\text{séc}\left(2\varphi \log \frac{1}{x}\right)}{e^{\pi\varphi} - e^{-\pi\varphi}}\, d\varphi,$$

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} + \ldots$$

$$= \frac{\log 2}{\log \frac{1}{x}} - \frac{1}{4} + \int_0^\infty \frac{\tan g\left(\frac{\varphi}{2} \log \frac{1}{x}\right)}{e^{2\pi\varphi} - 1}\, d\varphi.$$

. . . .

On transforme sans peine ces intégrales en intégrales doubles, en faisant usage des premières formules du n° **22**. On trouve, par exemple,

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+x^6} + \frac{x^5}{1+x^{10}} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{\varphi\psi} - x^{-\varphi\psi}}{\left(e^{\frac{\pi\varphi}{2}} + e^{-\frac{\pi\varphi}{2}}\right)\left(e^{\frac{\pi\psi}{2}} + e^{-\frac{\pi\psi}{2}}\right)}\, d\varphi\, d\psi.$$

25. Nous allons enfin démontrer une autre formule, comprenant comme cas particuliers les transformations que M. Catalan a déduites de l'égalité (34). Soit, dans ce but, $a = x^n$, dans la formule (20). On trouve d'abord

$$\sum_{n+1} \frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \frac{\log \frac{1}{1-x^n}}{\log \frac{1}{x}} - \frac{x^n}{2(1-x^n)}$$

$$- \sum_1^\infty \frac{B_{2\nu} \mathfrak{B}_{2\nu}(x^{-n})}{(2\nu)!\, 2\nu} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{2\nu-1};$$

([1]) *Voir* les formules de M. Curtze dans le t. I des *Annali di Matematica*, et les transformations signalées par M. Catalan dans ses *Recherches sur quelques produits indéfinis* (p. 120).

puis, en vertu de la formule de Plana,

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{1-x^{\nu}} = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1-x^{n-1}} + \frac{1}{2}\frac{x^n}{1-x^n}$$

$$+ \frac{\log \frac{1}{1-x^n}}{\log \frac{1}{x}} - 2\int_0^{\infty} \frac{x^n \sin(\varphi \log x)}{1-2x^n \cos(\varphi \log x) + x^{2n}} \frac{d\varphi}{e^{2\pi\varphi}-1},$$

pourvu que l'on ait égard à la formule (19), dans laquelle on remplace x par $\varphi \log x$ et a par x^n. En particulier, pour $n = 1$, on trouve la formule de M. Catalan :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{1-x^{\nu}} = \frac{1}{2}\frac{x}{1-x} + \frac{\log \frac{1}{1-x}}{\log \frac{1}{x}}$$

$$- 2\int_0^{\infty} \frac{x \sin(\varphi \log x)}{1-2x\cos(\varphi \log x) + x^2} \frac{d\varphi}{e^{2\pi\varphi}-1}.$$