Nouvelles annales de mathématiques

René Godefroy

Sur les centres de courbure de l'ellipse et de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 237-245

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__237_1>

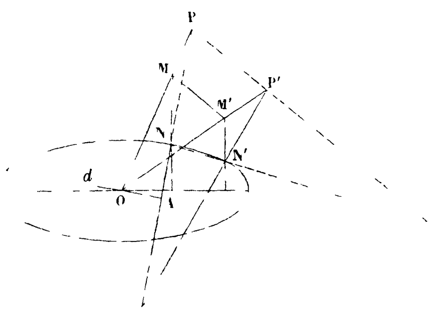
SUR LES CENTRES DE COURBURE DE L'ELLIPSE ET DE LA PARABOLE;

PAR M. RENÉ GODEFROY,
Élève de l'École Polytechnique.

Centre de courbure de l'ellipse. — Soit une ellipse de centre O, de demi-axes a et b. La solution repose sur ce fait que la normale en un point N de l'ellipse rencontre le rayon correspondant OM du cercle circonscrit à l'ellipse en un point P appartenant au cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $a + b$. Menons une normale voisine de celle-ci à laquelle correspondent les points N′, M′, P′. Elle coupe la première au point R. Les droites NN′, PP′ se coupent au point T.

Soient R le rayon de courbure en N, d le diamètre conjugué de ON, NA $= h$ sa distance au point N.

Fig. 1.



Le triangle PNT, coupé par la normale P′N′, donne lieu à la relation

$$\frac{\mathrm{NR}}{\mathrm{PR}} = \frac{\mathrm{NN'}}{\mathrm{PP'}}\,\frac{\mathrm{TP'}}{\mathrm{TN'}}.$$

Quand P′R viendra en coïncidence avec PR, on aura

$$\lim \frac{\mathrm{NN'}}{\mathrm{PP'}} = \lim \frac{\mathrm{NN'}}{\mathrm{MM'}} \times \lim \frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{PP'}} = \frac{d}{a} \times \frac{a}{a-b} = \frac{d}{a-b},$$

$$\lim \frac{\mathrm{TP'}}{\mathrm{TN'}} = \lim \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TN}} = \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PA}} = \frac{a-b}{d-h},$$

car PN $= d$.

Remplaçons dans la première relation $\frac{\mathrm{NR}}{\mathrm{PR}}$ par $\frac{\mathrm{R}}{d-\mathrm{R}}$, et le deuxième membre par les valeurs trouvées : il vient

$$\frac{\mathrm{R}}{d-\mathrm{R}} = \frac{d}{d-h},$$

$$\mathrm{R} = \frac{d^2}{h};$$

c'est la formule connue de Dupin.

On peut opérer un peu différemment au moyen d'un artifice que nous utiliserons encore.

Les diamètres des cercles circonscrits aux triangles NRN′, PRN′ sont entre eux comme les bases NN′, PP′ de ces triangles. Le premier a pour limite le rayon de courbure en N, le second le diamètre du cercle passant au centre de courbure et tangent en P au cercle $a+b$, lequel a pour valeur $\frac{(a-b)(R+d)}{d+h}$.

On a donc

$$\frac{R}{\frac{(a-b)(R+d)}{d+h}} = \frac{d}{a+b}$$

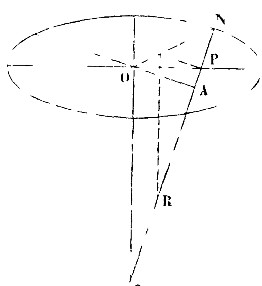
ou

$$\frac{R}{d+R} = \frac{d}{d+h},$$

$$R = \frac{d^2}{h}.$$

On peut passer de cette formule à une construction

Fig. 2.



géométrique connue, ou l'établir au moyen de cette construction.

Soient P, Q les points d'intersection de la normale en N avec les axes : d étant le demi-diamètre perpendiculaire, on a

$$NP.NQ = d^2.$$

On voit de suite sur la figure que

$$\frac{NP}{d} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{NQ}{d} = \frac{a}{b},$$

d'où

$$NP.NQ = d^2.$$

Menons par P une perpendiculaire à NPQ jusqu'en NO et du point de rencontre une perpendiculaire au grand axe jusqu'en R sur NPQ, on a

$$R = \frac{d^2}{h} = \frac{NP}{NA} \cdot NQ = \frac{NR}{NQ} \cdot NQ = NR,$$

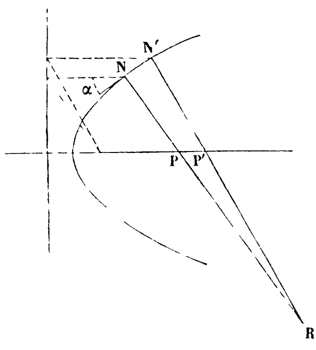
ce qui justifie la construction.

Les solutions précédentes, en raison même de la propriété dont elles dérivent, ne sont pas applicables aux deux autres sections coniques.

L'usage du principe que nous venons d'indiquer donne facilement le centre de courbure de la parabole.

Centre de courbure de la parabole. — Soient N, N′ deux points de la courbe. Les normales en ces points se

Fig. 3.



rencontrent en R et coupent l'axe aux points P, P′. Soient R le rayon de courbure en N, α l'angle de la tangente avec l'axe; les cercles circonscrits aux triangles RPP′, RNN' ont respectivement pour diamètres, à la limite, $\frac{R-N}{\cos\alpha}$ et R. Les bases sont, pour le premier triangle, la différence des rayons vecteurs des points N et N'; pour le second, cette différence divisée par $\cos\alpha$: leur rapport est $\cos\alpha$. On a donc

$$\frac{R-N}{R\cos\alpha} = \cos\alpha, \qquad R = \frac{N}{\sin^2\alpha},$$

expression connue d'où se déduit immédiatement la construction du centre de courbure de la courbe par l'intersection de la normale et de la perpendiculaire au rayon vecteur menée au point symétrique du point de la courbe par rapport au foyer.

Autre méthode pour l'ellipse. — Les normales NR, N'R en deux points voisins N, N' sont bissectrices des angles FNF', FN'F' des rayons vecteurs. On a, par suite, la relation

$$\text{angle}\,NRN' = \frac{\text{angle}\,NFN'}{2} + \frac{\text{angle}\,NF'N'}{2},$$

donc

$$\frac{\lim NRN'}{NN'} = \frac{\lim \frac{NFN'}{2}}{NN'} + \frac{\lim \frac{NF'N'}{2}}{NN'}.$$

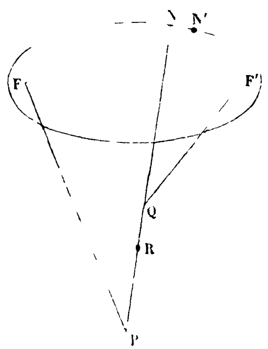
Le premier membre est l'inverse du rayon de courbure NR. Les deux rapports du deuxième membre sont les diamètres des cercles tangents en N à la conique et passant par les symétriques de N par rapport aux foyers F et F'; les rayons de ces cercles sont les segments NP, NQ que les perpendiculaires sur les rayons vecteurs, menées aux foyers, déterminent sur la normale.

On a donc

$$\frac{2}{NR} = \frac{1}{NP} + \frac{1}{NQ},$$

ce qui montre que le centre de courbure est conjugué harmonique du point de la courbe par rapport aux

Fig. 4.



points P et Q et, par suite, que le rayon de courbure est la moyenne harmonique des segments NP, NQ de la normale.

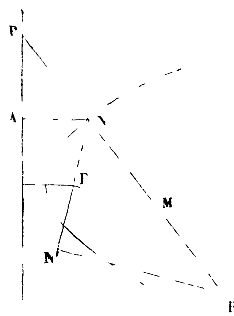
On voit avec quelle facilité nous sommes arrivés à ce résultat remarquable, auquel conduit aussi presque immédiatement la méthode des variations angulaires de M. Mannheim (*Nouvelles Annales*, t. XVI et XVIII). Le principe dont nous venons de faire usage avait été appliqué déjà à la même question (Salmon, *Sections coniques, méthodes infinitésimales*), mais la considération de ces cercles finis dépendant d'éléments infiniment petits donne ici à la solution une élégance et une simplicité plus grandes. Le procédé, fondé sur le fait que la normale est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs, convient également aux deux autres sections coniques, jouissant de la même propriété. Pour la parabole en particulier, on est conduit à la construction citée plus haut à propos de l'expression du rayon de courbure de la courbe. Ce procédé purement descriptif, appliqué directement à la parabole, est la plus simple des solutions de la question.

Poncelet, dans ses *Applications d'Analyse et de Géométrie,* arrive directement à ce résultat que le rayon de courbure de la parabole est double de la portion de normale comprise entre la courbe et sa directrice.

On passe sans peine de la construction donnée précédemment à cette dernière ou réciproquement.

Supposons le centre de courbure construit de la première façon : soient P le point de la normale sur la directrice, N′ le symétrique de N par rapport au foyer F.

Fig. 5.



A la projection de N sur la directrice. M étant le point où la perpendiculaire sur le rayon vecteur au foyer rencontre la normale, le rayon de courbure $NR = 2MN$; mais les deux triangles rectangles NFM, NAP étant égaux, il s'ensuit $NM = PM$; donc

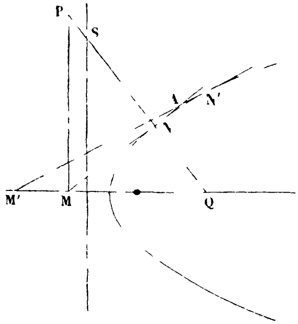
$$NR = 2PN.$$

Le raisonnement inverse donne la construction la plus connue en partant de celle de Poncelet.

Voici une autre solution également très rapide pour le cas de la parabole.

En deux points voisins N, N' de la courbe, les normales se coupent en R et les tangentes en A; ces dernières rencontrent l'axe en M et en M'; la perpendiculaire à l'axe en M rencontre la normale au point P. Les circonférences circonscrites aux triangles NRN',

Fig. 6.



MAM' ont pour diamètres limites le rayon de courbure R et MP; leurs bases sont, pour le premier, la différence des rayons vecteurs de N et N' divisée par cos α, α étant l'angle de la tangente en N avec l'axe; pour le second, cette différence même; on a donc

$$\frac{R}{MP} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

d'où

$$R = \frac{MP}{\cos\alpha} = PQ.$$

PQ étant la portion de normale comprise entre l'axe et sa perpendiculaire au pied de la tangente.

On passe encore sans difficulté de ce résultat à celui de Poncelet.

S étant le point où la normale rencontre la directrice, on a

$$PS + NQ = NS,$$

comme se projetant sur l'axe suivant une longueur égale au rayon vecteur du point N. Ajoutant de part et d'autre SN, il vient

$$PQ = 2SN,$$

ce qui montre la concordance des résultats.