NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE SAINT-GERMAIN

# Sur la détermination géométrique des brachistochrones

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 5 (1886), p. 177-185

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__177_0>

# SUR LA DÉTERMINATION GÉOMÉTRIQUE DES BRACHISTOCHRONES;

PAR M. DE SAINT-GERMAIN.

On donne, comme on le sait, le nom de *brachistochrone* à la ligne que doit suivre un point matériel, sollicité par des forces données, pour aller d'une position à une autre dans un temps minimum; quand la vitesse du mobile peut être déterminée directement par le théorème des forces vives, ce qui implique l'absence de résistances passives, la brachistochrone jouit de propriétés qui permettent de la déterminer sans recourir au calcul des variations. Je me propose d'établir ces propriétés par des considérations géométriques; j'étudierai ensuite la brachistochrone dans le voisinage du point de départ; enfin je déterminerai la courbe tout entière dans un cas assez étendu où elle n'est pas plane.

Je rappelle d'abord la solution d'un problème connu : étant donnés deux points A et B dans deux régions de l'espace séparées par une surface S, trouver sur cette surface un point M, tel qu'un mobile qui se meut avec la vitesse $a$ dans la région qui contient A, avec la vitesse $b$ dans la région qui contient B, doive suivre la ligne brisée AMB pour aller de A en B dans un temps minimum.

Soit M′ un point quelconque de S, infiniment voisin du point cherché M; d'après le théorème de Fermat, les deux lignes brisées AMB, AM′B doivent être parcourues dans des temps égaux, en négligeant les infiniment petits du second ordre; on aura donc

$$\frac{\mathrm{AM}-\mathrm{AM}'}{a}+\frac{\mathrm{BM}-\mathrm{BM}'}{b}=0;$$

on reconnaît aisément que cette égalité revient à la suivante :

$$\text{(1)} \qquad \frac{\cos \mathrm{AMM}'}{a} - \frac{\cos \mathrm{BMM}'}{b} = 0.$$

On peut prendre la direction de MM′ perpendiculaire sur AM; on voit qu'alors elle sera aussi perpendiculaire sur BM, et, comme elle l'est encore sur la normale MN à S, il faut que les droites MA, MB, MN soient dans un même plan.

Cela posé, j'appelle *angle d'incidence* et *angle de transmission* les angles aigus $i$ et $r$ que les routes AM et MB font avec la normale à S; si l'on prend le point M′ dans le plan AMB, de manière que AMM′ soit aigu, on aura

$$\mathrm{AMM}' = 90^\circ - i, \qquad \mathrm{BMM}' = 90^\circ - r;$$

la relation (1) exprime que les sinus des angles d'incidence et de transmission sont entre eux dans le rapport de $a$ à $b$; cette relation, jointe à la condition que les plans des deux angles coïncident, permet de déterminer le point M. La ligne brisée AMB tourne sa convexité vers la partie de la normale à S qui se dirige du côté où la vitesse est la plus grande.

Supposons maintenant qu'un mobile doive aller de A en B en traversant un grand nombre de régions séparées par des surfaces données, et dans chacune desquelles il se meuve avec une vitesse donnée; cherchons la ligne brisée L qu'il doit suivre pour aller de A en B dans un temps minimum. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$ $n+1$ sommets consécutifs de L, situés sur les surfaces $\mathrm{S}, \mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_n$. Les résultats précédents sont applicables aux deux côtés qui se coupent sur une surface quelconque $\mathrm{S}_k$; donc le plan de trois sommets consécutifs $\mathrm{M}_{k-1}, \mathrm{M}_k, \mathrm{M}_{k+1}$ contient la normale à la surface séparatrice $\mathrm{S}_k$ au sommet $\mathrm{M}_k$;

c'est un premier caractère de L. Pour en trouver un autre, considérons les angles d'incidence et de transmission $i_k$ et $r_k$ relatifs à la surface $S_k$, les vitesses $v_k$ et $v_{k+1}$ dont le mobile est animé avant d'atteindre cette surface, et après l'avoir traversée; on aura

$$(2) \qquad \frac{\sin i}{v} = \frac{\sin r}{v_1}, \qquad \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin r_1}{v_2}, \qquad \dots$$

Lorsque les surfaces $S_k$ sont des plans parallèles, on voit que L est tout entière dans un plan perpendiculaire aux plans S; de plus, $r_1 = i_1$, $r_2 = i_2$, ...; le rapport $\frac{\sin i}{v}$ a une même valeur pour tous les sommets de L, ce qui caractérise cette ligne.

Pour le cas où les surfaces $S_k$ sont quelconques, considérons l'angle $\varepsilon_k = r_k - i_k$ dont L s'infléchit en traversant $S_k$, et traitons les $\varepsilon_k$ comme des infiniment petits; on aura

$$\frac{\sin i_k}{v_k} = \frac{\sin r_k}{v_{k+1}} = \frac{\varepsilon_k \cos i_k}{v_{k+1} - v_k}, \qquad \frac{\varepsilon_k}{v_{k+1} - v_k} = \frac{\tang i_k}{v_k}.$$

Ainsi l'on a

$$\frac{\varepsilon}{v_1 - v} = \frac{\tang i}{v},$$

$$\frac{\varepsilon_1}{v_2 - v_1} = \frac{\tang i_1}{v_1}, \qquad \dots, \qquad \frac{\varepsilon_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{\tang i_n}{v_n}.$$

La somme des numérateurs des premiers membres divisée par la somme des dénominateurs donne un quotient compris entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $\frac{\tang i_k}{v_k}$; si j'écris

$$(3) \qquad \frac{\varepsilon + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}{v_{n+1} - v} = \lambda \frac{\tang i}{v},$$

$\lambda$ sera très voisin de l'unité quand la longueur $MM_1 \dots M_n$ sera très petite.

Supposons que les surfaces S deviennent infiniment nombreuses et rapprochées les unes des autres; la ligne brisée L se transforme en une courbe C; la limite de $\varepsilon + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$ est la courbure totale de l'arc vers lequel tend la ligne polygonale $MM_n$; on peut supposer que cet arc ait une longueur infiniment petite $dS$; sa courbure totale est alors $\frac{dS}{\rho}$, $\rho$ désignant le rayon de courbure; l'angle $i$, qui figure dans l'équation (3), est l'angle de la tangente à C au point quelconque M avec la normale à la surface S qui passe en ce point; $\lambda$ devient égal à l'unité, et l'on a

$$(4) \qquad \frac{dS}{\rho\, dv} = \frac{\operatorname{tang} i}{v}.$$

Il résulte, d'ailleurs, de la remarque faite sur le plan qui contient trois sommets consécutifs de L que le plan osculateur a C en M est normal à S; cette condition, jointe à l'équation (4), détermine la ligne C que doit suivre un mobile pour aller de A à B dans un temps minimum, étant donnée la vitesse qu'il doit avoir en traversant chacune des surfaces S.

Cela posé, imaginons un point matériel $m$, soumis à l'action d'une force F, telle qu'on puisse, relativement à cette force, former l'intégrale des forces vives; il existe une infinité de surfaces de niveau correspondant à F, et l'on peut calculer la vitesse $v$ que prendrait, en passant sur l'une quelconque S de ces surfaces, le point $m$, en supposant qu'il se meuve librement sous l'action de la seule force F, et qu'il parte d'un point A avec une vitesse connue $v_0$. D'autre part, nous savons déterminer la courbe C que devrait suivre un mobile $\mu$, pour aller du point A jusqu'au point B dans un temps minimum, en supposant qu'il doive traverser chacune des surfaces S avec la vitesse $v$ qui vient d'être définie.

Revenons à notre point $m$ et supposons que, partant du point A avec la vitesse $v_0$, il soit obligé de suivre une courbe parfaitement polie et coïncidant avec C ; il mettra, pour arriver au point B, le même temps que le point $\mu$ : il en résulte que C est la brachistochrone correspondant à la force F, puisque, d'une manière absolue, il n'est pas possible d'aller de A en B dans un temps inférieur à celui qu'exige le trajet suivant la route C, étant donnée la vitesse avec laquelle il faut traverser chacune des surfaces S.

Je n'insiste pas sur le cas simple où les surfaces de niveau sont des plans parallèles, comme cela arrive quand le point $m$ est soumis à la seule action de la pesanteur; la brachistochrone est plane, et l'on en trouve une équation différentielle du premier ordre en exprimant que $\frac{\sin i}{v}$ est constant. Pour le cas où les surfaces de niveau sont quelconques, remplaçons, dans l'équation (4), $ds$ par $v\,dt$ : nous en tirerons

$$(5)\qquad \frac{v^2}{\rho} = \frac{dv}{dt}\tang i.$$

Cette équation a une interprétation mécanique simple. Au point M la force F, normale à S, est dans le plan osculateur à C et fait l'angle $i$ avec la tangente; en outre, comme elle est, par rapport à S, dirigée du côté où la vitesse de $m$ est la plus grande, la brachistochrone tourne vers elle sa convexité; donc la projection de F sur la normale principale à C sera égale à $F\sin i$ et dirigée en sens contraire du rayon de courbure. Faisons la masse de $m$ égale à l'unité; $\frac{dv}{dt}$ sera égal à $F\cos i$, et $\tang i\frac{dv}{dt}$ sera la projection de F sur la normale principale à C. L'équation (5) exprime que cette projection est égale en grandeur et en direction à la force centrifuge : cette condition, jointe avec celle que F doit être toujours située dans le plan osculateur à la brachistochrone, suffit pour déterminer cette courbe.

De ce qui précède, on peut conclure immédiatement que la pression exercée par le mobile $m$ sur la brachistochrone est double de la composante de F normale à la courbe; toutes deux sont dirigées suivant le prolongement de la normale principale.

On peut établir deux propositions générales sur la forme de la brachistochrone dans le voisinage du point de départ A quand $v_0$ est nul. En premier lieu, je dis que la tangente en A a la même direction que la force F en ce point.

Supposons, en effet, que la force $F_0$ en A fasse l'angle $\varphi$ avec la tangente à C, et considérons un très petit arc $AM = s$; au point M, le carré de la vitesse, égal à $2\int F \cos i\, ds$, est sensiblement égal à $2F_0 s \cos\varphi$; la composante normale de F diffère elle-même très peu de $F_0 \sin\varphi$, et l'on a

$$\frac{2F_0 s \cos\varphi}{\rho} = (1 + \varepsilon) F_0 \sin\varphi,$$

$\varepsilon$ étant une très petite quantité. L'arc AM peut être regardé comme contenu dans le plan osculateur en A; si donc $\alpha$ est l'angle de la tangente en M avec la tangente en A, $\rho$ sera égal à $\frac{ds}{d\alpha}$, et l'on tirera de l'équation précédente

$$d\alpha = \frac{1 - \varepsilon}{2} \tang\varphi \frac{ds}{s};$$

en intégrant à partir de $s = 0$, on voit que la courbure totale de l'arc AM est infinie : cet arc affecte la forme d'une spirale ayant A pour point asymptotique, ce qui est en contradiction avec l'idée de brachistochrone; il faut donc que l'angle $\varphi$ soit nul.

Je dis, en second lieu, que le rayon de courbure en A est nul, pourvu que la force F agissant sur un point quelconque de la tangente AT à C soit toujours dirigée suivant AT, ce qui arrive avec les forces que l'on considère le plus habituellement. La perpendiculaire MP abaissée du point M sur AT a une longueur égale à $cs^m$, $c$ étant fini et $m > 1$ : au point P la force F agirait suivant AT; au point M elle fait avec AT un angle de l'ordre de $s^m$. L'angle de la tangente en M avec AT est sensiblement

$$\alpha = \frac{d\mathrm{MP}}{ds} = mcs^{m-1};$$

l'angle $i$ ne diffère de $\alpha$ que d'un infiniment petit d'ordre supérieur. On a, d'ailleurs, à très peu près,

$$v^2 = 2\mathrm{F}_0 s \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds};$$

l'équation (5) donne

$$2\mathrm{F}_0 s \times m(m-1)cs^{m-2} = m(1+\varepsilon)\mathrm{F}_0 cs^{m-1},$$

$\varepsilon$ étant encore très petit; l'égalité se réduit à

$$2(m-1) = 1, \qquad m = \tfrac{3}{2},$$

ce qui conduit à une valeur infinie pour $\rho$.

Je vais déterminer la brachistochrone en supposant le point $m$, de masse 1, attiré vers une droite fixe $Oz$ par une force F dirigée suivant la perpendiculaire $m$P abaissée sur $Oz$; soit $\mathrm{F} = \varphi'(r)$, $r$ étant la longueur de $m$P.

Soient $x, y, z$ les coordonnées d'un point quelconque de la brachistochrone par rapport à trois axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$; les composantes de F en ce point sont

$$-\frac{x}{r}\varphi'(r), \quad -\frac{y}{r}\varphi'(r), \quad 0;$$

la condition pour que F soit dans le plan osculateur est

$$x(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + y(dz\,d^2x - dx\,d^2z) = 0;$$

d'où, par une intégration facile, H étant une constante,

$$x\,dy - y\,dx = \mathrm{H}\,dz.$$

Rapportons C à des coordonnées cylindriques $r$, $\theta$, $z$; je désigne par des lettres accentuées les dérivées relatives à l'arc $s$ de la courbe, que je prends pour variable indépendante. La dernière relation nous donne

$$(6) \qquad r^2\theta' = \mathrm{H}z'.$$

Soient $\rho$ le rayon de courbure de C au point $m$; $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles que ce rayon fait avec la perpendiculaire P$m$, avec la normale au plan $z$O$m$, enfin avec O$z$; on a, par des formules générales,

$$(7) \qquad \frac{\cos\lambda}{\rho} = r'' - r\theta'^2, \qquad \frac{\cos\mu}{\rho} = \frac{1}{r}\frac{d.r^2\theta'}{ds}, \qquad \frac{\cos\nu}{\rho} = z''.$$

Un moyen facile d'obtenir ces équations serait de considérer un point de masse 1 se mouvant sur une courbe sans être soumis à d'autre force que la réaction normale; cette réaction est égale à la force centripète, et, en égalant ses composantes aux composantes connues de l'accélération, on arrive aux formules (7).

On a, en tenant compte de la relation (6),

$$1 = r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2 = r'^2 + \frac{\mathrm{H}^2}{r^2}z'^2 + z'^2;$$

différentiant,

$$r'r'' - \frac{\mathrm{H}^2 r'}{r^3}z'^2 + \left(\frac{\mathrm{H}^2}{r^2} + 1\right)z'z'' = 0.$$

Les formules (7) deviennent

$$\frac{\cos\lambda}{\rho} = -\left(1 + \frac{\mathrm{H}^2}{r^2}\right)\frac{z'z''}{r'}, \qquad \frac{\cos\mu}{\rho} = \frac{\mathrm{H}}{r}z'', \qquad \frac{\cos\nu}{\rho} = z'';$$

d'où

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(1+\frac{H^2}{r^2}\right)\left[\left(1+\frac{H^2}{r^2}\right)\frac{z'^2}{r'^2}+1\right]z''^2 = \left(1+\frac{H^2}{r^2}\right)\left(\frac{z''}{r'}\right)^2.$$

La projection de F sur la normale principale étant égale à $\frac{v^2}{\rho}$, on a

$$-\cos\lambda \times -\varphi'(r) = \frac{v^2}{\rho}, \qquad \frac{\cos\lambda}{\rho}\varphi'(r) = \frac{v^2}{\rho^2}.$$

Le théorème des forces vives donne $v^2$, en supposant $v = 0$ pour $r = a$, et nous avons l'expression de $\frac{\cos\lambda}{\rho}$ et de $\frac{1}{\rho^2}$; il vient

$$-\left(1+\frac{H^2}{r^2}\right)\frac{z'z''}{r'}\varphi'(r) = 2[\varphi(a)-\varphi(r)]\left(1+\frac{H^2}{r^2}\right)\left(\frac{z''}{r'}\right)^2.$$

On peut tout diviser par $\left(1+\frac{H^2}{r^2}\right)\frac{z''}{r'}$, et l'on trouve

$$\frac{-r'\varphi'(r)}{\varphi(a)-\varphi(r)} = 2\frac{z''}{z'}, \qquad \varphi(a)-\varphi(r) = Kz'^2,$$

K étant une nouvelle constante. Si l'on remplace $z'^2$ par sa valeur

$$z'^2 = \frac{r^4\,d\theta^2}{H^2(dr^2+r^2\,d\theta^2)+r^4\,d\theta^2},$$

on aura l'équation différentielle de la projection de la brachistochrone sur le plan des $xy$. En particulier, pour $\varphi'(r) = c^2 r$, on trouvera que cette projection a la forme d'une hypocycloïde, tout en étant d'espèce plus transcendante.