Condition pour que quatre droites soient les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 158-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__158_1>

CONDITION POUR QUE QUATRE DROITES SOIENT LES GÉNÉRATRICES D'UN MÊME SYSTÈME D'UN HYPERBOLOIDE;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{X-x_1}{a_1} &= \frac{Y-y_1}{b_1} = \frac{Z-z_1}{c_1},\\ \frac{X-x_2}{a_2} &= \frac{Y-y_2}{b_2} = \frac{Z-z_2}{c_2},\\ \frac{X-x_3}{a_3} &= \frac{Y-y_3}{b_3} = \frac{Z-z_3}{c_3},\\ \frac{X-x_4}{a_4} &= \frac{Y-y_4}{b_4} = \frac{Z-z_4}{c_4} \end{aligned}\right.$$

les équations des quatre droites; posons

$$\begin{aligned} c_i y_i - b_i z_i &= l_i, & a_i z_i - c_i x_i &= m_i, & b_i x_i - a_i y_i &= n_i, \\ cy - bz &= l, & az - cx &= m, & bx - ay &= n, \end{aligned}$$

et soient

$$(2) \qquad \frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b} = \frac{Z - z}{c}$$

les équations d'une nouvelle droite. Pour que les droites (1) fassent partie des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde, il faut qu'une infinité de droites, telles que (2), les rencontrent; il faut donc que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x_i - x & y_i - y & z_i - z \\ a & b & c \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} = 0,$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$, ce qui peut s'écrire

$$la_i + mb_i + nc_i + al_i + bm_i + cn_i = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & al_1 + bm_1 + cn_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & al_2 + bm_2 + cn_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & al_3 + bm_3 + cn_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & al_4 + bm_4 + cn_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Posant donc

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & l_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & l_4 \end{vmatrix} = \mathrm{L}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & m_1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix} = \mathrm{M},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & n_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix} = \mathrm{N},$$

on a

$$a\mathrm{L} + b\mathrm{M} + c\mathrm{N} = 0.$$

Cela doit avoir lieu pour une infinité de valeurs de a, b, c et, en particulier, pour des valeurs a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''', telles que l'on n'ait pas

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = 0,$$

sans quoi les directions a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''' seraient parallèles à un même plan; donc on doit avoir

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0:$$

telles sont les conditions cherchées.