NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST CESÀRO

Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 5 (1886), p. 127-142

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1886_3_5__127_1>

SUR L'EMPLOI DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES;

PAR M. ERNEST CESARO.

1. La position d'un point M sur une ligne est déterminée par l'arc s qui le sépare d'un point fixe de la courbe : la nature de celle-ci, au point considéré, est définie par les rayons de courbure ρ et r. Abstraction faite de sa position dans l'espace, la courbe peut donc être représentée par deux relations (*équations intrin-*

sèques) entre les variables s, ρ, r (*coordonnées intrinsèques*). Il est clair qu'il n'en faut pas davantage pour l'étude des *propriétés intimes* d'une ligne; mais il y a plus : nous allons montrer, en effet, et c'est là le but principal de cet article, que, par le simple emploi des coordonnées intrinsèques, on passe aisément de l'étude des faits inhérents à la courbe à celle des faits *extérieurs*.

2. Au point M prenons comme axes la *tangente*, la *binormale* et la *normale principale*, et supposons que les coordonnées x, y, z d'un point P soient données en fonction de s. On démontre facilement que, lorsqu'on passe de M au point infiniment voisin, ces coordonnées subissent, relativement aux axes primitifs, les variations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= dx - \frac{z-\rho}{\rho}\,ds,\\ \delta y &= dy - \frac{z}{r}\,ds,\\ \delta z &= dz + \left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right)ds. \end{aligned}\right.$$

De même, si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs d'une droite quelconque, relativement au même trièdre, on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\lambda &= d\lambda - \frac{\nu}{\rho}\,ds,\\ \delta\mu &= d\mu - \frac{\nu}{r}\,ds,\\ \delta\nu &= d\nu + \left(\frac{\lambda}{\rho} + \frac{\mu}{r}\right)ds. \end{aligned}\right.$$

Les formules (1) et (2), quoique très simples et faciles à établir, sont d'une importance extrême; elles constituent, à elles seules, la base d'une nouvelle théorie des lignes et des surfaces.

3. *Point fixe.* — Pour exprimer que le point P est fixe dans l'espace, on doit écrire, en vertu de (1),

$$(3)\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{z-\rho}{\rho}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{z}{r}, \qquad \frac{dz}{ds} = -\left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right).$$

Direction fixe. — De même, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la direction (λ, μ, ν) soit invariable sont

$$(4)\qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\nu}{\rho}, \qquad \frac{d\mu}{ds} = \frac{\nu}{r}, \qquad \frac{d\nu}{ds} = -\left(\frac{\lambda}{\rho} + \frac{\mu}{r}\right).$$

Droite fixe. — Pour exprimer qu'une droite est fixe, il faut, aux conditions d'invariabilité de sa direction, joindre celles de fixité de l'un de ses points.

Plan fixe. — Le plan perpendiculaire à la direction (λ, μ, ν), situé à la distance p de M, sera fixe si aux conditions (4) on joint la suivante :

$$(5)\qquad \frac{dp}{ds} = -\lambda,$$

que l'on obtient, soit par des considérations géométriques directes, soit en différentiant l'équation du plan et en tenant compte des formules (3) et (4).

4. Maintenant nous pouvons chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne appartienne à une surface donnée : cette condition est, en quelque sorte, l'équation intrinsèque différentielle de la surface considérée. Si, par exemple, la surface est une sphère de rayon R, il doit exister un point *fixe* P, dont les coordonnées vérifient constamment l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

En ayant égard aux formules (3), trois dérivations consécutives de cette équation montrent que les coordonnées du centre P sont nécessairement

$$(6)\qquad x = 0, \qquad y = -r\frac{d\rho}{ds}, \qquad z = \rho.$$

Conséquemment, la condition cherchée est

$$(7)\qquad \left(r\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + \rho^2 = R^2.$$

En d'autre termes, θ étant une variable arbitraire, *les lignes sphériques sont caractérisées par les équations*

$$(8)\qquad s = f(\theta), \qquad r = f'(\theta), \qquad \rho = R\cos\theta.$$

Il est évident, d'ailleurs, que θ représente l'angle des normales à la courbe et à la surface.

5. On sait que, pour toute courbe, les valeurs (6) sont les coordonnées des points de l'arète de rebroussement de la *surface polaire*. Il en résulte que, pour les lignes sphériques, la surface polaire est un cône : cela est évident. Mais on peut se poser la question en sens inverse et sous une autre forme en se demandant : *quelles sont les lignes dont le plan normal passe par un point fixe?* L'équation du plan normal est $x = 0$: on obtient, par dérivation, $z = \rho$. Deux autres dérivations donnent successivement

$$y = -r\frac{d\rho}{ds}, \qquad \frac{\rho}{r} + \frac{d}{ds}\left(r\frac{d\rho}{ds}\right) = 0.$$

Or, si l'on intègre la dernière relation, on obtient l'équation (7), et celle-ci exprime que le point M se trouve à une distance *constante* d'un point fixe. Les lignes sphériques sont donc les seules qui jouissent de la propriété demandée.

6. *Est-il possible de tracer une hélice sur une sphère?*

On doit avoir $r = m\rho$, et, par suite, d'après (8),

$$s = m\mathrm{R}\sin\theta, \qquad r = m\mathrm{R}\cos\theta, \qquad \rho = \mathrm{R}\cos\theta.$$

Les équations intrinsèques de la ligne cherchée sont donc

$$(9) \qquad r = m\rho, \qquad \rho^2 + \frac{m^2}{s^2} = \mathrm{R}^2.$$

La dernière équation nous montre que, dans le développement de la surface des tangentes à l'hélice, cette courbe se transforme en une ligne cycloïdale, à savoir une *épicycloïde* ou une *hypocycloïde* suivant que l'angle constant φ, sous lequel l'hélice rencontre les génératrices du cylindre, est plus grand ou plus petit que 45°. Lorsque $\varphi = 45°$, l'hélice se transforme en une *cycloïde*. Quant à la section droite du cylindre, on sait que son équation s'obtient en remplaçant s et ρ respectivement par $\frac{s}{\sin\varphi}$ et $\frac{\rho}{\sin^2\varphi}$ dans la deuxième égalité (9), ce qui donne

$$\rho^2 + \frac{s^2}{1+m^2} = \left(\frac{m^2\mathrm{R}}{1-m^2}\right)^2.$$

Le cylindre est donc toujours à base *épicycloïdale*. Le diamètre du cercle directeur est $\mathrm{R}\tan 2\varphi$ pour la transformée de l'hélice : il est égal à $2\mathrm{R}\cos\varphi$ pour la section droite du cylindre.

7. L'axe du cylindre est la parallèle menée par le centre de la sphère à la *droite rectifiante*; les parallèles menées par le même centre à la tangente, à la binormale, à la normale principale, font les angles *constants* φ, $90° - \varphi$, $90°$, avec cet axe, et, par suite, elles décrivent deux cônes circulaires et un plan. En d'autres termes, les *indicatrices* sphériques des trois droites principales de l'hélice sont deux petits cercles et un grand cercle.

Dès lors, il est aisé de concevoir une génération simple de la courbe. En effet, le plan normal se meut en enveloppant un cône circulaire (le cône des binormales) et il coupe la sphère suivant un grand cercle, qui contient nécessairement le point M de la courbe. Or, si l'on observe que, d'après les formules (8), la variation $d\theta$ de l'angle, que le rayon passant par M fait avec la normale, ne diffère pas de l'angle de deux binormales consécutives, on voit immédiatement que le point M est *fixe* sur le grand cercle mobile. Conséquemment : *les seules hélices possibles sur une sphère sont les courbes décrites par les points d'un grand cercle, qui se meut en restant tangent à un petit cercle.* Il est évident que l'on peut aussi engendrer la courbe en faisant rouler, sans glissement, un cylindre circulaire, de rayon a, sur un autre cylindre circulaire, de rayon b : les points d'une génératrice fixe du cylindre mobile, qui restent à la distance $2a+b$ d'un point de l'axe, décrivent la courbe demandée.

8. *Passage aux coordonnées extrinsèques.* — Prenons comme axes des X et des Y deux diamètres de la sphère, perpendiculaires entre eux et situés dans le plan de base du cylindre épicycloïdal ; comptons les Z sur l'axe de ce cylindre. Puisque les cosinus directeurs de l'axe des Z sont $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, o, il est clair que l'on a

$$Z = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$

où l'on doit remplacer x et y par les coordonnées du centre. Par conséquent,

$$Z = R\sin\theta\sin\varphi. \tag{10}$$

Cherchons, maintenant, la distance p de M à un plan *fixe*, passant par l'axe du cylindre ; elle est donnée par l'expression $\lambda x + \mu y + \nu z$, où x, y, z sont les coordonnées du centre, de sorte que

$$p = \mathrm{R}(\mu \sin\theta + \nu \cos\theta). \tag{11}$$

En outre, la direction (λ, μ, ν) doit être perpendiculaire à l'axe du cylindre, et, par suite, on peut poser

$$\lambda = -\sin\vartheta \sin\varphi, \qquad \mu = \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad \nu = \cos\vartheta,$$

où l'on détermine ϑ facilement par la troisième condition (4). On trouve

$$\vartheta = \frac{\theta}{\cos\varphi} + \text{const.}$$

Chaque valeur de la constante correspond à un plan particulier : si l'on veut considérer deux plans perpendiculaires, il est aisé de voir qu'il faut prendre deux constantes différant de $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi les équations

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}\left(\quad \cos\theta \cos\frac{\theta}{\cos\varphi} + \cos\varphi \sin\theta \sin\frac{\theta}{\cos\varphi}\right),$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{R}\left(-\cos\theta \sin\frac{\theta}{\cos\varphi} + \cos\varphi \sin\theta \cos\frac{\theta}{\cos\varphi}\right).$$

En y joignant l'équation (10), on trouve, par élimination de θ, les équations ordinaires de la courbe.

9. On est amené à la considération des mêmes courbes lorsqu'on étudie les *développantes sphériques* des lignes sphériques, c'est-à-dire les courbes décrites par les points d'un grand cercle, qui se meut en restant tangent à une courbe quelconque, donnée sur la sphère. Soit (M) cette courbe : relativement au trièdre principal de (M), les coordonnées des points M_0 de la développante sont

$$x = -\mathrm{R}\sin\frac{s}{\mathrm{R}},$$

$$y = \mathrm{R}\left(1 - \cos\frac{s}{\mathrm{R}}\right)\sin\theta,$$

$$z = \mathrm{R}\left(1 - \cos\frac{s}{\mathrm{R}}\right)\cos\theta.$$

Les formules (1) donnent

$$\frac{\partial x}{ds} = 0, \qquad \frac{\partial y}{ds} = \sin\frac{s}{R}\sin\theta, \qquad \frac{\partial z}{ds} = -\sin\frac{s}{R}\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

Par suite, le rapport des vitesses de M_0 et M et les cosinus directeurs de la tangente à (M_0) sont

$$(12)\qquad \frac{ds_0}{ds} = \sin\frac{s}{R}\operatorname{tang}\theta, \qquad a = 0, \qquad b = -\cos\theta, \qquad c = \sin\theta.$$

Ainsi, la tangente à (M_0) est perpendiculaire au grand cercle MM_0. En d'autres termes, (M_0) est une trajectoire orthogonale des grands cercles tangents à (M). D'après les formules (2),

$$\frac{\partial a}{ds} = -\frac{\sin\theta}{\rho}, \qquad \frac{\partial b}{ds} = 0, \qquad \frac{\partial c}{ds} = 0.$$

Il en résulte que la normale à (M_0) est parallèle à la tangente à (M), et, par suite, la binormale est parallèle au rayon passant par M, de sorte que (M) est l'*indicatrice des binormales* de (M_0). En outre,

$$(13)\qquad \rho_0 = -R\sin\frac{s}{R}.$$

Enfin, puisque l'angle de deux normales consécutives de (M_0) est égal à l'angle de contingence de (M), on a, en vertu du théorème de Lancret,

$$\left(\frac{ds_0}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{ds_0}{r_0}\right)^2 = \left(\frac{ds}{\rho}\right)^2,$$

d'où

$$(14)\qquad r_0 = R\sin\frac{s}{R}\operatorname{tang}\theta.$$

Les formules (12), (13), (14) permettent de chercher (M_0), connaissant (M). Du reste, ces formules peuvent être résumées en une seule

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{R}.$$

D'après (13) et (14), on voit que $\tang\theta$ représente, en valeur absolue, le *rapport des courbures* de (M_0). Par conséquent, pour que (M_0) soit une hélice, il faut et il suffit que θ soit constant, c'est-à-dire que (M) soit un cercle. Donc : *les hélices sphériques sont les développantes des cercles de la sphère.*

10. Nous avons dit que $\tang\theta$ représente le rapport des courbures de la ligne (M_0). On en déduit immédiatement que la droite rectifiante de (M_0) est parallèle à la binormale de (M). L'arête de rebroussement (M_1) de la surface rectifiante de (M_0) a donc sa tangente et sa binormale respectivement parallèles à la binormale et à la tangente (M), aux points correspondants, d'où il résulte que le rapport des courbures de (M_1) est inverse du rapport analogue de (M); par conséquent, si (M_1) est une hélice, (M) aussi est une hélice, et réciproquement. Cela étant, si l'on veut que (M_0) soit une géodésique d'hélicoïde développable, il faut et il suffit que (M_1) soit une hélice, et, par suite, qu'il en soit de même de (M). Il faut, en d'autres termes, que (M_0) soit une développante sphérique d'hélice sphérique, comme l'a fait remarquer M. Pirondini [1]. Donc : *les seules lignes sphériques, possibles comme géodésiques sur des hélicoïdes développables, sont les deuxièmes développantes sphériques des cercles de la sphère.*

11. *Loxodromies.* — Soit (λ, μ, ν) la direction des perpendiculaires au plan de l'équateur. La tangente au méridien passant par M est perpendiculaire au rayon, et, d'autre part, elle doit faire l'angle *constant* ψ avec la tangente à la courbe : il en résulte que ses cosinus

---

(1) *Journal de Battaglini*, p. 229; 1885.

directeurs sont

$$\cos\psi,\quad \sin\psi\cos\theta,\quad -\sin\psi\sin\theta.$$

D'ailleurs, cette tangente doit rencontrer le diamètre, dont la direction est (λ, μ, ν). Cela exige que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \lambda & \cos\psi & 0 \\ \mu & \sin\psi\cos\theta & \sin\theta \\ \nu & -\sin\psi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda \tang\psi = \mu\cos\theta - \nu\sin\theta.$$

On trouve, par dérivation,

$$\nu\tang\psi = \lambda\sin\theta,$$

et, par suite,

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda}{\sin\psi\cos\psi\cos\theta} &= \frac{\mu}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta} \\ &= \frac{\nu}{\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}}. \end{aligned} \right.$$

Une nouvelle dérivation donne facilement, au signe près,

$$s = \frac{R}{\cos\psi}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\tang\theta}{\sin\psi}\right);$$

puis

$$r = \frac{R\tang\psi}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta},\qquad \rho = R\cos\theta.$$

Il faudrait éliminer θ entre ces trois relations pour avoir les équations intrinsèques de la loxodromie.

12. Les formules (15) sont susceptibles d'autres applications. Ainsi, en les utilisant dans (11), on trouve d'abord que la distance de M au plan de l'équateur est

$$p = \frac{R\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}}.$$

D'autre part, si $\mathcal{L}$ est la latitude du point M, la même distance est égale à $R \sin \mathcal{L}$. Il en résulte

$$\operatorname{tang} \mathcal{L} = \frac{\operatorname{tang} \theta}{\sin \psi}.$$

Dès lors, les équations intrinsèques de la loxodromie peuvent être mises sous cette autre forme

$$s = \frac{R \mathcal{L}}{\cos \psi},$$

$$\rho = \frac{R \cos \mathcal{L}}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \sin^2 \mathcal{L}}},$$

$$r = \frac{R(1 - \cos^2 \psi \sin^2 \mathcal{L})}{\sin \psi \cos \psi}.$$

La première de ces équations est évidente. Remarquons encore que les coordonnées polaires de la projection de M sur le plan de l'équateur sont données par les égalités

$$u = R \cos \mathcal{L}, \qquad \frac{u \, d\omega}{ds} = \sin \psi.$$

On en déduit aisément

$$u = \frac{2R}{e^{\omega \cot \psi} + e^{-\omega \cot \psi}}.$$

Telle est l'équation de la projection équatoriale de la loxodromie.

13. Les exemples traités suffisent pour montrer toute l'efficacité de cette méthode, qui est susceptible, d'ailleurs, des applications les plus variées. En nous bornant à celles qui concernent la recherche des équations intrinsèques différentielles des surfaces, nous allons indiquer succinctement comment on pourrait traiter quelques autres cas particuliers. En général, après avoir mis le problème en équation, moyennant une propriété caractéristique de la surface, on différentie l'équation obtenue, autant de fois qu'il le faut pour en éli-

miner les variables auxiliaires introduites, et l'on arrive ainsi au résultat voulu. Par exemple, pour le *cône de révolution*, il doit exister un point *fixe* P (coordonnées x, y, z), et une direction *invariable* (cosinus λ, μ, ν), telles que la droite MP fasse un angle constant θ avec cette direction. L'équation du problème est donc

$$\lambda x + \mu y + \nu z = u\cos\theta, \qquad \text{où} \qquad u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Trois dérivations consécutives donnent

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{\mu}{y + \rho\dfrac{z}{y}\dfrac{y^2 + z^2}{u^2}} = \frac{\nu}{z - \rho\dfrac{y^2 + z^2}{u^2}} = \frac{\cos\theta}{u}.$$

On en déduit

$$\rho = \left(1 + \frac{x^2}{y^2 + z^2}\right)^{\frac{3}{2}} y \tang\theta.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure d'une ligne quelconque, tracée sur un cône de révolution, en fonction des distances du sommet au plan *normal*, au plan *osculateur* et au plan *rectifiant*. Trois nouvelles dérivations permettent d'éliminer ces distances et de trouver l'équation différentielle demandée ; il suffira d'y supposer r infini, pour avoir l'équation différentielle des *coniques*.

14. De même, pour le *cylindre de révolution*, on exprimera que la distance de M à une droite fixe est une constante R. On a d'abord

$$x^2 + y^2 + z^2 - p^2 = R^2 \qquad \text{ou} \qquad p = \lambda x + \mu y + \nu z;$$

puis, par dérivation,

$$\begin{aligned} x &= \lambda p, \\ y &= \mu p + 3\lambda\nu r - (1 - \lambda^2) r \frac{d\rho}{ds}, \\ z &= \nu p + (1 - \lambda^2)\rho. \end{aligned}$$

Ces relations, multipliées respectivement par λ, μ, ν et additionnées, donnent

$$(1-\lambda^2)\left(\mu r \frac{d\rho}{ds} - \nu\rho\right) = 3\lambda\mu\nu r.$$

Deux autres dérivations suffisent pour éliminer λ, μ, ν. On arrive autrement à ce résultat, en exprimant que la projection de la courbe sur un plan *fixe* est un cercle : c'est même celle-ci la voie à suivre lorsqu'il s'agit d'un cylindre quelconque. Les coordonnées de la projection M_0 de M, sur un plan fixe, sont

$$x = \lambda p, \qquad y = \mu p, \qquad z - \nu p.$$

D'après les formules fondamentales, on a

$$\frac{\delta x}{ds} = 1 - \lambda^2, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\lambda\mu, \qquad \frac{\delta z}{ds} = -\lambda\nu;$$

par conséquent, l'élément de la ligne (M_0) et les cosinus directeurs de la tangente à cette ligne sont donnés par les égalités

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{ds_0}{ds} &= \sqrt{1-\lambda^2}; \\ a &= \sqrt{1-\lambda^2}; \\ b &= -\frac{\lambda\mu}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \\ c &= -\frac{\lambda\nu}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \end{aligned} \right.$$

Cela étant, on a aussi

$$\frac{\delta a}{ds} = 0, \qquad \frac{\delta b}{ds} = -\frac{\mu\nu}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\rho}, \qquad \frac{\delta c}{ds} = \frac{\mu^2}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\rho}.$$

En élevant au carré et en additionnant, on obtient

$$(17) \qquad \rho_0 = \frac{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu}\rho.$$

Si

$$F(\rho_0, s_0) = 0$$

est l'équation de la section droite, en la différentiant et en y remplaçant les valeurs (16) et (17), on trouve une relation contenant les variables auxiliaires λ, μ, ν, que l'on éliminera au moyen de deux nouvelles différentiations. Dans le cas particulier du cylindre de révolution, il suffit de différentier (17), en y supposant ρ_0 *constant.*

15. Comme dernier exemple, considérons un *hélicoïde gauche* à plan directeur. Un point M de cette surface étant projeté en N, sur l'axe directeur, on doit prendre sur NM une longueur NP *constante* et exprimer que le lieu décrit par le point P est à flexion et torsion constantes. Nous suivrons une autre voie : ω étant l'angle de MN avec un plan fixe, passant par l'axe, et p la distance de N à un point Q, fixe sur l'axe, nous exprimerons que la longueur p varie proportionnellement à ω, de sorte que

$$dp = a\,d\omega. \tag{18}$$

Or, si x, y, z sont les coordonnées du point *fixe* Q, et λ, μ, ν les cosinus directeurs de l'axe, nous pouvons, aux trois premières variables, substituer les coordonnées de N, à savoir

$$\xi = x - \lambda p, \qquad \eta = y - \mu p, \qquad \zeta = z - \nu p,$$

en observant que, d'après les formules (3), (4), (5), on a

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\zeta}{\rho} - (1 - \lambda^2),$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{\zeta}{r} + \lambda\mu,$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\eta}{r}\right) + \lambda\nu.$$

Cela étant, considérons les cosinus directeurs de MN :

$$\frac{\alpha}{\xi} = \frac{\beta}{\eta} = \frac{\gamma}{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

On a, d'après (2),

$$\frac{\delta\alpha}{ds} = \frac{\alpha^2 + \lambda^2 - 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

$$\frac{\delta\beta}{ds} = \frac{\alpha\beta + \lambda\mu}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

$$\frac{\delta\gamma}{ds} = \frac{\alpha\gamma + \lambda\nu}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

En élevant au carré et en additionnant, on obtient

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\nu\eta - \mu\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

au signe près; par conséquent, si l'on tient compte de (5), l'égalité (18) devient

$$\lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = a(\nu\eta - \mu\xi).$$

Deux dérivations consécutives donnent

$$\lambda^2 \rho\xi = \frac{a}{2}\eta,$$

$$\left(\lambda\frac{d\rho}{ds} + 2\nu\right)\xi + \left(\lambda - \frac{a}{2\lambda r}\right)\zeta = \lambda(\mu^2 + \nu^2) + \mu\frac{a}{2}.$$

En y joignant la relation

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0,$$

nous pouvons déjà éliminer ξ, η, ζ, ce qui nous conduit à l'égalité

$$2\lambda\nu r\frac{d\rho}{ds} + 2\lambda\mu\rho + 3(\nu^2 - \lambda^2)r + a$$
$$= \frac{4\lambda^3 r\rho}{a^2}[\lambda(\mu^2 + \nu^2)\rho + 2\mu a].$$

Au moyen de deux autres dérivations, on se débarrasse de λ, μ, ν. Nous laissons au lecteur le soin d'achever les calculs, qui ne présentent, d'ailleurs, aucune difficulté. Bien prochainement, peut-être, nous reviendrons sur cette féconde méthode de recherches, pour en faire des applications à la théorie des *développoïdes* et des *podaires* sphériques, ainsi qu'à la théorie générale des surfaces.