Note sur les solutions, en nombres entiers, de l'équation (I) $\frac{x^3+2}{5^2} = y$, où l'on suppose x impair

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 431-432
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__431_1>

NOTE SUR LES SOLUTIONS, EN NOMBRES ENTIERS, DE L'ÉQUATION

$$(1)\quad \frac{x^3+2}{5^2}=y,$$

OU L'ON SUPPOSE x IMPAIR [1].

Pour que $\frac{x^3+2}{5^2}$ représente un nombre entier, il faut évidemment que le chiffre des unités simples du nombre impair x soit 7.

En posant

$$x = 10n + 7,$$

il vient

$$x^3 + 2 = 10^3 n^3 + 3.7.10^2 n^2 + 3.7^2.10n + 345.$$

[1] Question proposée par un Abonné aux *Nouvelles Annales*.

Les deux termes $10^3 n^3$, $3.7.10^2 n^2$ sont divisibles par 5^2 et

$$3.7^2.10n + 345 = (3.7^2.2n + 69)5 = (7^2.2n + 23)15;$$

il faut donc que $7^2.2n + 23$ soit multiple de 5.

Or l'équation

$$7^2.2n + 23 = 5.z$$

est vérifiée par

$$n = 4 \quad \text{et} \quad z = 83;$$

d'où

$$n = 4 + 5t,$$

t, nombre entier quelconque; par suite,

$$10n = 40 + 5t, \quad 10n + 7 = 47 + 50t;$$

donc

$$x = 47 + 50t.$$

Ainsi, les valeurs positives de x forment une progression arithmétique dont le premier terme est 47, et la raison 50.

L'équation (1) fait connaître les valeurs correspondantes de y.

On voit que 47 est le plus petit nombre positif, impair, dont le cube augmenté de 2 est divisible par 25.

(G.).