J.-B. Pomey

De la partition des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 408-417
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__408_1>

DE LA PARTITION DES NOMBRES;

PAR M. J.-B. POMEY.

Soit proposée l'équation

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + m\lambda_m = n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ne pouvant recevoir que les valeurs o ou 1.

J'appelle A_n^m le nombre de systèmes différents de valeurs pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ qui vérifient cette égalité. Autrement dit, A_n^m est le nombre de solutions de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m} i\lambda_i = n. \tag{1}$$

Voici quelques propriétés des nombres A_n^m :

Première proposition. — A tout système de valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ correspond un système de valeurs $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_m$, tel que l'on a, quel que soit i, $\lambda_i + \lambda'_i = 1$. Dès lors, à la solution $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de l'équation (1) correspond une solution de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m} i\lambda_i = \frac{m(m+1)}{2} - n,$$

et cette solution est $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$, et réciproquement. On a donc $A_n^m = A_{n'}^m$ pour $n + n' = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Deuxième proposition. — Le nombre A_n^m est égal au nombre de solutions de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} i\lambda_i = n.$$

augmenté du nombre de solutions de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} i\lambda_i = n - m;$$

car λ_m ne peut avoir que les valeurs 0 et 1. Nous avons ainsi partagé les solutions en deux groupes : dans le premier, $\lambda_m = 0$; dans le second, $\lambda_m = 1$. Donc

$$A_n^m = A_n^{m-1} + A_{n-m}^{m-1}.$$

Troisième proposition. — J'attribue aux λ toutes les valeurs qu'ils peuvent avoir; j'aurai alors A_0^m fois le nombre 0, A_1^m fois le nombre 1, A_i^m fois le nombre i et $A^m_{\frac{m(m+1)}{2}}$ fois le nombre $\frac{m(m+1)}{2}$, en formant toutes les combinaisons des deux signes $+1$ et 0 pour les λ dans $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + m\lambda_m$.

Or je formerai le Tableau des diverses combinaisons obtenues pour

$$\lambda_m, \lambda_{m-1}, \lambda_{m-2}, \ldots, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1,$$

en écrivant tous les nombres de la numération binaire, et ayant soin de remplacer par des zéros les chiffres manquant sur la gauche; je m'arrêterai au nombre $111\ldots1$, le nombre des unités étant m.

J'aurai le Tableau suivant :

λ_m	λ_{m-1}	λ_{m-2}	...	λ_4	λ_3	λ_2	λ_1
0	0	0	...	0	0	0	0
0	0	0	...	0	0	0	1
0	0	0	...	0	0	1	0
.	.	.	...	0	0	1	1

.	.	.	...	0	1	0	0
.	.	.	...	0	1	0	1
.	.	.	...	0	1	1	0
.	.	.	...	0	1	1	1
.	.	.	...	1	0	0	0
.	.	.	...	1	0	0	1
0	0	0	...	1	0	1	0
.	.	.	...	1	0	1	1
.	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	.	.	...	.	.	.	.
1	1	1	...	1	1	1	1

Dans chaque colonne, j'ai le même nombre d'unités : 2^{m-1}. Donc

$$\Sigma\lambda_1 = \Sigma\lambda_2 = \ldots = \Sigma\lambda_m = 2^{m-1},$$

et, par suite, j'ai

$$\begin{aligned} & A_0^m\, 0 + A_1^m\, 1 + A_2^m\, 2 + \ldots + A^m_{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{m(m+1)}{2} \\ & = 1\Sigma\lambda_1 + 2\Sigma\lambda_2 + \ldots + m\Sigma\lambda_m \\ & = 2^{m-1}(1 + 2 + 3 + \ldots + m) = \frac{m(m+1)}{2} 2^{m-1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{m(m+1)}{2}} i A_i^m = 2^{m-1} \frac{m(m-1)}{2}.$$

Quatrième proposition. — On vient de voir, dans le cours de la précédente démonstration, que le nombre des lignes du Tableau qui y a été formé est 2^m. D'où

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{m(m+1)}{2}} A_i^m = 2^m.$$

Cinquième proposition. — Si l'on a $\sum_{i=1}^{i=m} i\lambda_i = N$ et qu'on remplace λ_1 par $1-\lambda_1$, valeur aussi admissible pour λ_1 dans le système total des valeurs que peut prendre $\Sigma i\lambda_i$, à toute valeur N paire correspondra par cette substitution une valeur impaire N', et réciproquement. On a donc

$$\Sigma(-1)^i A_i^m = 0;$$

le nombre des valeurs paires obtenues est égal au nombre des valeurs impaires.

Sixième proposition. — Supposons que

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + m\lambda_m$$

donne une valeur paire $4n$, et soit $\lambda_2 + \lambda'_2 = 1$, alors $\lambda_1 + 2\lambda'_2 + \ldots + m\lambda_m$ donnera la valeur $n' = 4n + 2$ ou $n' = 4n - 2$, suivant que λ_2 est nul ou égal à 1. Cette simple remarque montre que le nombre des valeurs pairement paires de $\Sigma i\lambda_i$ est égal au nombre de ses valeurs impairement paires. Donc

$$A_0^m - A_2^m + A_4^m - \ldots = 0.$$

De même le nombre de ses valeurs de la forme $4n+1$ est égal au nombre de ses valeurs de la forme $4n+3$, ou bien

$$A_1^m - A_3^m + A_5^m - \ldots = 0.$$

Septième proposition. — Je remarque que, en ajoutant ± 3 aux nombres $6m$, $6m \pm 1$, $6m \pm 2$, $6m \pm 3$, on obtient des nombres de la forme $6m \pm 3$, $6m \mp 2$, $6m \mp 1$, $6m$.

A une valeur de $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + m\lambda_m$ donnant un nombre de l'une des formes $6m$ ou $6m \pm 1$ correspond, pour $\lambda_3 + \lambda'_3 = 1$, un nombre de l'une des formes $6m \pm 3$ et $6m \pm 2$, et réciproquement. Donc

$$\Sigma A_i^m = \Sigma A_j^m,$$

si i parcourt tous les nombres de la forme $6m$ ou bien

$6m \pm 1$, j parcourant tous les nombres de la forme $6m \pm 3$ ou bien $6m \pm 2$.

Huitième proposition. — Celle-ci est la plus importante de toutes.

On a

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^m)$$
$$= A_0^m + A_1^m x + A_2^m x^2 + \ldots + A_{\frac{m(m+1)}{2}}^m x^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Cette identité est évidente.

En changeant x en $\frac{1}{x}$ et comparant les résultats, en faisant $x = -1$ ou $x = \sqrt{-1}$ ou $x = 1$, ou en prenant la dérivée des deux membres, on obtient aisément tous les résultats qui précèdent.

Neuvième proposition. — Je pose

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^m);$$

d'où

$$\log f(x) = \log(1+x) + \log(1+x^2) + \ldots + \log(1+x^m),$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \ldots + \frac{mx^{m-1}}{1+x^m}.$$

Or on a

$$\frac{px^{p-1}}{1+x^p} = px^{p-1}(1 - x^p + x^{2p} - x^{3p} + \ldots),$$

ou

$$\frac{px^{p-1}}{1+x^p} = px^{p-1} - px^{2p-1} + px^{3p-1} - px^{4p-1} + \ldots.$$

Quand le terme en x^{i-1} peut-il provenir du développement de $\frac{px^{p-1}}{1+x^p}$? Il faudra qu'on ait

$$kp - 1 = i - 1 \quad \text{ou} \quad i = kp,$$

c'est-à-dire que p soit un diviseur de i, et alors x^{kp-1} est affecte du coefficient $(-1)^k p$.

On a donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum B_{i-1}^m x^{i-1},$$

en posant

$$B_{i-1}^m = \sum^{i} (-1)^p p,$$

la sommation portant sur les nombres p moindres que m ou au plus égaux à m et qui sont des diviseurs de i.

Remarquons que, si le nombre des facteurs m croît indéfiniment, p désignera un facteur quelconque de i, ainsi que $\frac{i}{p}$, et que, alors, on a

$$\lim B_{i-1}^m = i \sum \frac{(-1)^\delta}{\delta},$$

δ parcourant tous les diviseurs de i. Or, en chassant le dénominateur $f(x)$ et égalant les coefficients des termes en x^{i-1}, on a

$$i A_i^m = A_0^m B_{i-1}^m + A_1^m B_{i-2}^m + A_2^m B_{i-3}^m + \ldots + A_{i-1}^m B_0$$

et

$$i \lim A_i^m = \sum_{k=0}^{k=i-1} \lim A_k^m B_{i-k-1}^m \quad (\text{pour } m = \infty);$$

et, en posant $\lim A_i^m \doteq A_i$, $\lim B_i^m = i B_i$, on aurait

$$A_i + \sum_{k=0}^{k=i-1} A_k B_{i-k-1} = 0.$$

Cette formule de récurrence fait connaître les A en fonction des B supposés connus ; et ces B représentent l'excès de la somme des inverses des diviseurs pairs de i sur l'excès de la somme des inverses des diviseurs impairs de i.

Dixième proposition. — Autre série récurrente. On a

$$\frac{1}{1+x^p} = 1 - x^p + x^{2p} - x^{3p} + \ldots;$$

ainsi, en conservant la signification donnée plus haut à $f(x)$,

$$\frac{1}{f(x)} = (1 - x + x^2 - x^3 \ldots)(1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots)$$
$$\times (1 - x^3 + x^6 \ldots) \ldots (1 - x^m + x^{2m} \ldots),$$

et, en posant

$$\frac{1}{f(x)} = \sum C_i^m x^i,$$

on aura

$$C_i^m = \sum (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ étant des entiers positifs pris de toutes les façons, tels qu'on ait

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + m\lambda_m = i.$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$ est le nombre des parties égales ou inégales, mais non supérieures à m dont la somme fait i, et C_i^m est l'excès du nombre des décompositions en un nombre pair de parties sur le nombre des décompositions en un nombre impair de parties.

On aura, en chassant le dénominateur,

$$C_0^m = 1, \quad C_1^m A_0^m + C_0^m A_1^m = 0, \quad \ldots$$

et

$$C_i^m A_0^m + C_{i-1}^m A_1^m + \ldots + C_0^m A_i^m = 0.$$

Exemple I. — On a

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^4}$$
$$= (1-x)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$$
$$= 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \ldots,$$

et l'on déduit de là : le nombre des partitions paires (telles que le nombre des parties soit pair) du second ordre d'un nombre de la forme $4n + 2$ ou $4n + 3$ est égal à celui de ses partitions impaires.

Mais, si le nombre est de la forme $4n$ ou $4n+1$, l'un de ces nombres de partitions surpasse l'autre d'une unité.

Exemple II. — On a

$$\frac{1}{(1-x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}}{(1+x)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{3}x}{1-x+x^2}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} &= \left(-\frac{1}{1+x}\right)' \\ &= (-1+x-x^2\ldots)' = 1-2x+3x^2-4x^3+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}}{(1+x)^2} &= \sum(-1)^n(n+1)x^n\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum x^n\left[(-1)^n\frac{n+1}{2}+(-1)^{n-1}\frac{n}{2}\right].\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}&(-1)^n\frac{n+1}{2}+(-1)^{n-1}\frac{n}{3} \\ &\quad = (-1)^n\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-\frac{n}{3}\right) = (-1)^n\frac{n+3}{6},\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} = \sum\frac{(-1)^p}{2}x^{2p},$$

et enfin

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1+x}{1+x^3} &= (1+x)\sum(-1)^q x^{3q} \\ &= \sum(-1)^q x^{3q} + \sum(-1)^q x^{3q+1}\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{-\frac{1}{3}x}{1-x+x^2} = \sum\frac{(-1)^{q+1}}{3}x^{3q+1} + \sum\frac{(-1)^{q+1}}{3}x^{3q+2}.$$

Cela posé, en appelant Δ l'excès du nombre des partitions paires sur le nombre des partitions impaires, on aura le Tableau suivant :

$$n=6m\ldots\ldots\quad \Delta=(-1)^n\frac{n+3}{6}+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}=\frac{n+3}{6}+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2},$$

$$n=6m+1\ldots\quad \Delta=-\frac{n+3}{6}+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}+1}}{3}\quad (ex.: n=7,\quad \Delta=-2),$$

$$n=6m+2\ldots\quad \Delta=\frac{n+3}{6}+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}+\frac{(-1)^{\frac{n-2}{3}+1}}{3},$$

$$n=6m+3\ldots\quad \Delta=-\frac{n+3}{6},$$

$$n=6m+4\ldots\quad \Delta=\frac{n+3}{6}+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}+1}}{3},$$

$$n=6m+5\ldots\quad \Delta=-\frac{n+3}{6}+\frac{(-1)^{\frac{n-2}{3}+1}}{3}.$$

Remarque I. — On a identiquement

$$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}=\frac{1}{(1+a)\ldots(1+a^{n-1})}-\frac{a^n}{(1+a)\ldots(1+a^n)},$$

$$\frac{1}{(1+a)\ldots(1+a^{n-1})}=\frac{1}{(1+a)\ldots(1+a^{n-2})}-\frac{a^{n-1}}{(1+a)\ldots(1+a^{n-1})},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{1+a}=1-\frac{a}{1+a},$$

d'où

$$\frac{1}{(1+a)\ldots(1+a^n)}=1-\frac{a^n}{(1+a)\ldots(1+a^n)}-\frac{a^{n-1}}{(1+a)\ldots(1+a^{n-1})}-\ldots-\frac{a}{1+a}.$$

Donc, en appelant C_i^n l'excès du nombre de manières dont on peut décomposer i en une somme d'un nombre pair de parties entières, égales ou inégales non supérieures à n, sur le nombre des manières dont on peut le décomposer en une somme d'un nombre impair de parties entières, égales ou inégales non supérieures à n, on aura la formule suivante, pour $i > n$,

$$C_i^n + C_{i-n}^n + C_{i-(n-1)}^{n-1} + C_{i-(n-2)}^{n-2} + \ldots + C_{i-1}^1 = 0,$$

et, pour $i < n$, il faut supprimer les termes dont les indices sont négatifs.

Remarque II. — Considérons les m nombres 1, 2, 3, ..., m; on peut les combiner n à n d'un nombre de façons égal à

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots m}.$$

Soit $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \delta = i$ une de ces combinaisons, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ désignant n nombres pris parmi les n premiers nombres entiers. De même, je combine par addition les nombres de chaque combinaison. Soit A_i le nombre de fois que le nombre i se trouve répété. Le signe Σ portant alors sur tous les nombres analogues à i, on aura

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} = \sum A_i.$$

Donnons à n les valeurs 0, 1, 2, ..., m, et ajoutons les égalités semblables à la précédente, nous aurons, en nous rappelant que la somme des coefficients du binôme est égale à 2^m, et en désignant par B_i le nombre des façons de décomposer i en une somme de parties entières inégales non supérieures à m,

$$2^m = \Sigma B_i.$$