Composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique en 1885

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 345-350
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__345_0>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1885;

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Par les deux foyers d'une ellipse fixe on fait passer une circonférence variable.

1° *A quelle condition doit satisfaire cette ellipse, pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points, et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection?*

2° *En chacun des points d'intersection, on mène les tangentes de l'ellipse. Ces quatre droites forment un quadrilatère. Quel est le lieu des sommets de ce quadrilatère quand le cercle varie?*

3° *Quel est le lieu de l'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère, symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse?*

4° *On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Quel est le lieu de leurs points de contact avec le cercle?*

1° Parmi toutes les circonférences qui passent par les deux foyers F, F', la plus petite est celle qui a pour diamètre FF'. L'ellipse dont le petit axe est égal à FF' est doublement tangente à cette circonférence et remplit la condition de la rencontrer en quatre points réels (confondus deux à deux). Cette ellipse ne peut être rencontrée en quatre points réels par aucune autre circonférence passant par F et F′; mais, si le petit axe est plus petit que FF′, on a une ellipse satisfaisant à la condition demandée : cette condition est donc $b < c$.

Supposons qu'il en soit ainsi. Les centres des circonférences satisfaisant à la condition demandée occupent la portion du petit axe comprise entre les centres des circonférences qui passent respectivement par FF′ et par l'une des extrémités du petit axe. Appelons a le demi grand axe de l'ellipse. Le rayon de ces circonférences est égal à $\frac{a^2}{2b}$.

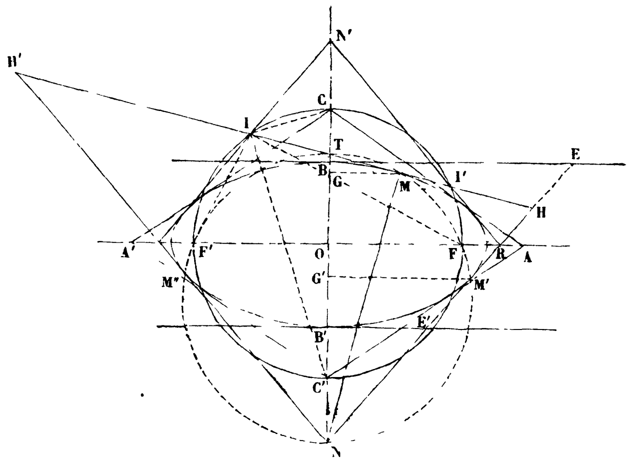
Par suite, le segment demandé du petit axe est égal à $2\left(\frac{a^2}{2b} - b\right)$ ou $\frac{c^2 - b^2}{b}$.

2° Pour résoudre les dernières parties de la question proposée, nous nous appuierons sur cette propriété : *D'un point d'une circonférence qui passe par* F, F′, *on mène des tangentes à l'ellipse : les angles compris entre ces droites ont pour bissectrices les droites qui joignent ce point aux points où la circonférence coupe le petit axe. Si l'on prend un des points* M *où la circonférence coupe l'ellipse, les droites* MT, MN *sont l'une la tangente, l'autre la normale à l'ellipse en* M.

D'après cela les tangentes à l'ellipse, issues de N, touchent cette courbe aux points M′, M″ où elle est coupée par la circonférence MFF′. Ces tangentes rencontrent TM aux points H, H′ qui décrivent une courbe (H) lorsqu'on déplace M sur l'ellipse.

Une tangente TM donne lieu à un seul point N, d'où partent deux tangentes à l'ellipse. Il y a alors sur TM deux points du lieu (H). Il n'y a que ces deux points, puisque deux autres tangentes à l'ellipse ne peuvent se couper sur la tangente TM. La courbe (H), n'étant rencontrée par la droite TM qu'en deux points, est une conique. Cette conique a évidemment pour axes les axes de l'ellipse.

Prenons la circonférence décrite sur FF′ comme diamètre et appelons C, C′ les points où elle coupe le petit axe. Les tangentes à l'ellipse, issues de ces points,



forment un parallélogramme. Les côtés opposés de ce parallélogramme donnent des points à l'infini sur (H); donc : *La conique* (H) *est une hyperbole. Les asymptotes de cette hyperbole sont les parallèles menées du centre* O *aux côtés de ce parallélogramme.*

Les sommets A, A′ *de ce parallélogramme, situés sur le grand axe de l'ellipse, sont les sommets de l'hyperbole* (H).

La portion CA *de la tangente à l'ellipse, issue de* C *et comprise entre les axes, est égale à la demi-distance focale de* (H).

3° Prenons le point N′, symétrique de N par rapport au centre O. Les tangentes à l'ellipse, issues de N′, encontrent la tangente MT aux points I, I′ qui appartiennent à la courbe demandée dans la troisième partie de la question. Sur TM, il n'y a que ces deux points de cette courbe : donc c'est une conique.

Il est facile de voir que sur l'une des tangentes à l'ellipse, issue de C, les points de cette conique sont C et le point de contact de cette tangente, c'est-à-dire C et l'un des points où l'ellipse est rencontrée par la circonférence CFC'F'. La conique lieu des points I contient donc C, C' et les points de contact des tangentes à l'ellipse issues de ces points. Ces six points appartiennent à la circonférence CFC'F'; donc : *Le lieu des points tels que* I *est la circonférence décrite sur* FF' *comme diamètre.*

Autrement. — Par F, F', I faisons passer une circonférence et appelons, pour le moment, O' son centre. Les droites qui joignent I aux points ou elle coupe la droite BB' sont les bissectrices des angles formés par IN', IT : alors $O'T \times O'N'$ est égal au carré du rayon de cette circonférence. On peut écrire alors

$$(OT - OO')(ON' + OO') = \overline{O'F}^2,$$

ou, en développant,

$$OT \times ON' - OO'(OT + ON') + \overline{OO'}^2 = c^2 + \overline{OO'}^2.$$

Mais

$$OT \times ON' = OT \times ON = c^2$$

La relation précédente donne alors

$$OO'(OT - ON') = 0.$$

Le segment OO' doit donc être nul. Ainsi O' se confond avec O, etc.

On arrive au même résultat si l'on suppose O' au-dessus du grand axe de l'ellipse.

4° La polaire de N, par rapport à l'ellipse, est la perpendiculaire M'G' abaissée de M' sur le petit axe BB'. Les points N, B, G', B' forment alors une division harmonique. Menons de ces points des perpendiculaires au petit axe. Ces droites rencontrent la tangente NM' aux points E, M', E' et alors N, E', M', E forment une division harmonique. Le point R étant le milieu de EE', on a

$$\mathrm{RM'} \times \mathrm{RN} = \overline{\mathrm{RE}}^2 = \overline{\mathrm{RE'}}^2.$$

Mais

$$\mathrm{RM'} \times \mathrm{RN} = \mathrm{RF} \times \mathrm{RF'}.$$

Donc

$$\mathrm{RF} \times \mathrm{RF'} = \overline{\mathrm{RE}}^2 = \overline{\mathrm{RE'}}^2.$$

Par suite, E et E' sont les points où NM' est touchée par des circonférences qui passent par F et F', c'est-à-dire que E et E' sont les points de contact d'une tangente commune à ces circonférences et à l'ellipse.

Le point M' *étant arbitraire, on voit que le lieu demandé dans la quatrième partie se compose des tangentes* BE, B'E' *à l'ellipse.*

Autrement. — Menons une tangente commune à l'ellipse et à une circonférence qui passe par F, F'. Soit E le point de contact de cette tangente et de cette circonférence. De ce point menons l'autre tangente à l'ellipse. Les bissectrices des angles compris entre ces deux tangentes sont les droites qui joignent E aux points de rencontre de cette circonférence avec le petit axe. Il résulte de là que la tangente à l'ellipse, qui n'est pas tangente à la circonférence, doit être perpendiculaire à BB', c'est-à-dire qu'elle est la tangente en B ou en B' à l'ellipse, d'où, etc.

Remarques. — 1° On a

$$\mathrm{OT} \times \mathrm{ON} = c^2.$$

Mais

$$OT \times OG = b^2, \quad ON \times OM' = b^2,$$

donc

$$OG \times OG' = \text{const.}$$

Ainsi :

Le produit des ordonnées des points de rencontre de l'ellipse et d'une circonférence qui passe par F, F' *est constant, quelle que soit cette circonférence.*

2° Le lieu des points tels que I ne dépendant que de la distance focale, on peut, dans la troisième partie de l'énoncé, substituer à l'ellipse donnée une ellipse qui lui est homofocale.

Ou encore l'on peut dire : *Si l'on prend sur le petit axe des points* T, N' *tels que* $OT \times ON' = c^2$, *les points de rencontre tels que* I *des tangentes à l'ellipse restent sur la circonférence décrite sur* FF' *comme diamètre, lorsqu'on fait varier l'ellipse en lui conservant* F *et* F' *comme foyers.*

3° Si d'un point quelconque d'une circonférence qui passe par F, F' on mène des tangentes à l'ellipse, ces droites comprennent entre elles des angles dont les bissectrices passent par les points où cette circonférence coupe le petit axe de l'ellipse. Par suite, *ces tangentes coupent de nouveau cette circonférence en des points qui sont symétriques par rapport à ce petit axe.*

Prenant les symétriques de ces tangentes par rapport au petit axe, on voit que *l'on peut inscrire à la circonférence des quadrilatères qui sont en même temps circonscrits à l'ellipse.* Cette dernière propriété m'a été signalée par l'auteur de la question proposée ; il en avait déduit l'énoncé de la quatrième partie de cette question.