NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CESÀRO

# Solution de la question 1338

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 4 (1885), p. 328-330

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__328_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

## SOLUTION DE LA QUESTION 1338;

PAR M. E. CESARO.

*L'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; soient $\alpha$ et $\beta$ deux racines consécutives de cette équation. La dérivée s'annule pour une valeur $\omega$ comprise entre $\alpha$ et $\beta$; démontrer que cette valeur est comprise entre*

$$\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)\alpha + \beta}{n},$$

*n désignant le degré de l'équation.* (LAGUERRE.)

Pour l'uniformité des développements qui suivent, nous changerons de notation. Soient $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ les racines de l'équation proposée, rangées par ordre de grandeur croissante. Soit $r$ la racine de $f'(z) = 0$, comprise entre $c_p$ et $c_{p+1}$. A cause de

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-c_1} + \frac{1}{z-c_2} + \frac{1}{z-c_3} + \ldots + \frac{1}{z-c_n},$$

nous devrons avoir

$$\frac{1}{r-c_1} + \frac{1}{r-c_2} + \ldots + \frac{1}{r-c_p}$$
$$= \frac{1}{c_{p+1}-r} + \frac{1}{c_{p+2}-r} + \ldots + \frac{1}{c_n-r}.$$

Si l'on observe que les termes du premier membre ne vont pas en diminuant, tandis que ceux du second membre ne vont pas en augmentant, on peut écrire

$$\frac{p}{r-c_p} \geqq \frac{1}{c_{p+1}-r}, \qquad \frac{1}{r-c_p} \leqq \frac{n-p}{c_{p+1}-r},$$

d'où

$$\frac{1}{n-p} \leqq \frac{r-c_p}{c_{p+1}-r} \leqq p.$$

A plus forte raison peut-on remplacer les deux limites par $\frac{1}{n-1}$, $n-1$, respectivement, et conclure

$$c_p + \frac{c_{p+1} - c_p}{n} \gtrless r \gtrless c_{p+1} - \frac{c_{p+1} - c_p}{n}.$$

En d'autres termes, ayant partagé l'intervalle $c_p c_{p+1}$ en segments égaux, on peut affirmer que, dans les segments extrêmes, la fonction dérivée ne s'annule pas. C'est le théorème de M. Laguerre.

*Remarque I.* — Si l'on suppose plus généralement que $z$ représente la variable complexe $x + iy$, et qu'on ait $c_s = a_s + ib_s$, on peut écrire

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{1}{z - c_s} = \sum \frac{x - a_s}{\delta_s^2} - i \sum \frac{y - b_s}{\delta_s^2},$$

en désignant par $\delta_s$ la distance du zéro $c_s$ au point $z$. Lorsque $z$ est un zéro de $f'(z)$, on doit avoir simultanément

$$\sum \frac{x - a_s}{\delta_s^2} = 0, \quad \sum \frac{y - b_s}{\delta_s^2} = 0.$$

Ces équations montrent que, si, aux zéros de $f(z)$, on applique des poids inversement proportionnels aux carrés de leurs distances respectives à un zéro P de $f'(z)$, le centre de gravité d'un tel système est précisément P.

*Remarque II.* — D'après la remarque précédente, étant donnés les zéros de $f(z)$, ceux de $f'(z)$ doivent être situés de telle sorte que, si, par un quelconque d'entre eux, on tire une droite quelconque, celle-ci ne laisse pas tous les zéros de $f(z)$ du même côté. On en déduit, par exemple, que, si les zéros de $f(z)$ sont les sommets d'un polygone convexe, les zéros de $f'(z)$ sont situés à l'intérieur du polygone. Il en est de même des zéros des dérivées suivantes, jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$, dont l'unique zéro n'est autre que le centre de gravité du polygone. Remarquons encore que, si les zéros de $f(z)$ sont alignés sur une droite, celle-ci contient aussi les zéros de $f^{k}(z)$. Dans ce dernier cas, il est aisé de reconnaître que la propriété signalée par M. Laguerre, pour le cas des zéros alignés sur l'axe des quantités réelles, ne cesse de subsister en général.

*Remarque III.* — Par rapport à une fonction donnée $f(z)$, à chaque point P correspond un point Q, centre de gravité d'un système de poids, appliqués aux zéros de $f(z)$ avec une intensité qui varie en raison inverse du carré de la distance à P. Nous avons vu que, lorsque P est un zéro de $f'(z)$, le point correspondant Q coïncide avec lui. En général, il existe, entre les affixes $z$, Z des deux points et leur distance $\delta$, la relation

$$f'(z) = \frac{f(z)}{z - Z} \sum \left(\frac{\delta}{\delta_s}\right)^2,$$

qui donne lieu à plusieurs observations intéressantes.

*Remarque IV.* — Les résultats précédents n'appartiennent pas exclusivement aux fonctions algébriques. On peut consulter, à ce sujet, notre article : *Remarques sur les fonctions holomorphes*, inséré au *Journal de Battaglini* (1884).

La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Juhel-Rénoy.

---

*ERRATA.* — Page 40, ligne 6, *au lieu de* $e^{e-1}$, *lisez* $e^{e^r-1}$. Page 42, ligne 7, *au lieu de* $y^{(p)}(1)$, *lisez* $\varphi^{(p)}(1)$. Page 45, ligne 6, en remontant, *au lieu de* $\varepsilon_{r\nu-1}\varepsilon_{r\nu+1}\varepsilon_{r\nu+1}$, *lisez* $\varepsilon_{r_{\nu-1}}\varepsilon_{r_\nu+1}\varepsilon_{r_{\nu+1}}$. Page 46, ligne 12, *au lieu de* $\varepsilon_2$, *lisez* $\varepsilon_{r_2}$. Page 50, ligne 4, *au lieu de* $\frac{s_r}{r}$, *lisez* $(-1)^{r\cdot 1}\frac{s_r}{r}$. Page 62, ligne 11, *au lieu de* $-\gamma_3 x^3$, *lisez* $+\gamma_3 x^3$. Page 570 du tome précédent, ligne 9 en remontant, *au lieu de* $(1)^{m+1} - \frac{p}{m}$, *lisez* $(-1)^{m-1}\frac{p}{m}$.