E. CESÀRO

Sur la série harmonique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 295-296
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__295_0>

SUR LA SÉRIE HARMONIQUE;

PAR M. E. CESARO.

1. Désignons par H_n la somme des n premiers termes de la série harmonique. Si l'on pose

$$u_{n-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{n^5} + \frac{1}{7}\,\frac{1}{n^7} + \ldots,$$

on a, d'après une formule connue,

$$l\,\frac{n+1}{n-1} = \frac{2}{n} + 2u_{n-1}.$$

Si, dans cette formule, on change n en $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2, on obtient, par addition,

$$l\,\frac{n(n+1)}{2} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + 2(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1})$$

ou bien

$$l\,\frac{n(n+1)}{2} = 2H_n - 2 + 2S_{n-1};$$

d'où

$$(1) \qquad H_n = l\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + 1 - S_{n-1}.$$

2. Pour calculer S_{n-1}, étudions la série u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}. On a

$$u_{n-1} < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7} + \ldots\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n}\right).$$

On obtient, par addition,

$$S_{n-1} < \frac{1}{12} - \frac{1}{6n(n+1)}.$$

Donc S_{n-1} tend vers une limite S, inférieure à $\frac{1}{12}$. Les termes étant positifs, on a

$$(2) \qquad S_{n-1} < S.$$

D'autre part, on trouve de la même façon

$$S - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \dots < \frac{1}{6n(n-1)};$$

d'où

$$(3) \qquad S_{n-1} > S - \frac{1}{6n(n-1)}.$$

Des inégalités (2) et (3), il résulte qu'on peut poser

$$S_{n-1} = S - \frac{\theta}{6n(n+1)},$$

θ étant compris entre 0 et 1.

3. Si, dans (1), on remplace S_{n-1} par sa valeur, on obtient

$$H_n = l\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} + 1 - S - \frac{\theta}{6n(n-1)}$$

ou bien

$$(4) \qquad H_n = C + l\sqrt{n(n-1)} + \frac{\theta}{6n(n+1)}.$$

C est une constante. Cette constante, qui porte le nom de *constante d'Euler*, est égale à 0,5772156649....

Remarque. — La formule (4) donne H_n avec une erreur moindre que $\frac{1}{6n^2}$. On trouve, par exemple,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000000} = 14,39.$$