Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 150-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__150_1>

QUESTIONS.

1525. On donne les deux demi-diamètres conjugués OA, OB d'une ellipse. Du point B on abaisse une perpendiculaire sur OA, et l'on porte sur cette droite les segments BC et BD égaux à OA. La circonférence COD rencontre aux points P, Q la parallèle menée du point B à OA.

On sait que OP, OQ donnent les directions des axes de l'ellipse; on demande de démontrer que les projections de OP et de OQ sur OC (ou sur OD) sont égales aux demi-axes de l'ellipse. (MANNHEIM.)

1526. Considérons un parallélogramme ABCD dans un plan, et une droite quelconque MM' de ce plan. Il existe deux coniques circonscrites au parallélogramme et tangentes à la droite MM'. Soit O le milieu du segment déterminé sur cette droite par les deux points de contact. Il existe en outre une conique inscrite dans le parallélogramme et tangente à la droite MM'. Soit O' son point de contact avec cette droite. Les points O et O' coïncident.

(H. ANDOYER.)

1527. Soient A, B, C, ... des nombres dont le premier chiffre à gauche n'est jamais zéro; a, b, c, ... ces nombres lus de droite à gauche.

J'appelle *nombre symétrique* un nombre tel que deux chiffres à égale distance des extrêmes soient égaux. Exemples : 1221, 12421.

J'appelle *pseudo-symétrique d'échelle p* un nombre tel que la somme de deux chiffres, à égale distance des extrêmes, soit p ou zéro ; s'il y a un nombre impair de chiffres dans ce nombre et que p soit impair, le chiffre du milieu doit toujours être zéro ; si p est pair, le chiffre du milieu peut être soit zéro, soit $\frac{p}{2}$. Exemples : 6035502, 6030502, 6034502 sont pseudo-symétriques d'échelle 8.

Cela posé :

1° Si A a n chiffres, trouver combien de valeurs différentes peut prendre la somme $A + a$ quand A varie de x^{n-1} à x^n, x étant la base du système de numération ;

2° Si l'on a $A + a = B + b$, A ayant n chiffres, B en ayant $n + 1$ et étant tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit plus petite que x, le nombre $A + a = A + b$ sera symétrique, et A sera pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$.

Exemple : on a $(x = 10)$

$$\begin{array}{ccc} N & & A + a \\ 12111011121 & = & 8607004053 + 3504007068. \\ & & B + b \\ & = & 10011000120 + 02100011001. \end{array}$$

(E. Lemoine.)

1528. Soient PA, PB, PC les trois normales menées d'un point P à une parabole donnée ; on considère les centres O, O', O'', O''' des quatre cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

1° Si le point P est sur la directrice, il coïncide avec l'un des points O, O', O'', O'''. Les trois autres sont sur la parabole, lieu des sommets des angles droits normaux à la parabole donnée.

2° Par les points O, O′, O″, O‴ on peut faire passer trois hyperboles équilatères, telles que les normales à chacune d'elles en ces quatre points soient concourantes. Les trois points de concours Q_1, Q_2, Q_3 sont sur un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC et de rayon triple, et sur les rayons de ce cercle qui passent par les centres des hyperboles correspondantes. Pour quelles positions du point P les trois hyperboles sont-elles réelles ? L'une de ces hyperboles a son centre sur l'axe de la parabole. Si le point Q correspondant est sur cette parabole, l'hyperbole correspondante passe par le point P.

3° En général, quel est le lieu du point P tel que l'une des hyperboles précédentes passe par ce point ? Quel est le lieu du point de concours Q, du centre de l'hyperbole, des points O, O′, O″, O‴ ?

4° Quel est le lieu des points Q_1, Q_2, Q_3, si le point P décrit une droite donnée ?

(J. Hadamard.)

1529. Trois droites, issues des trois sommets d'un triangle, déterminent, sur les côtés opposés, six segments tels que la différence entre le produit de trois segments non consécutifs et le produit des trois autres est $\frac{abc}{a'b'c'}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 lmn$. Dans cette expression, A, a, b, c désignent l'aire et les côtés du triangle donné ; A′, a', b', c' l'aire et les côtés du triangle formé par les trois droites ; l, m, n les segments de ces droites compris entre les sommets et les côtés du premier triangle.

(E. Cesaro.)