Nouvelles annales de mathématiques

E. Humbert

# Note sur la théorie des foyers

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 4 (1885), p. 138-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__138_1>

# NOTE SUR LA THÉORIE DES FOYERS;

Par M. E. HUMBERT,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nancy.

Considérons d'abord la conique

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

donnée par l'équation générale. Si, de l'ensemble des termes du second degré, on retranche $s(x^2+y^2)$, on obtient

$$(a-s)x^2 + 2bxy + (c-s)y^2,$$

qui est un carré parfait pour les deux valeurs de $s$ données par l'équation du second degré

$$(1) \qquad (a-s)(c-s) - b^2 = 0.$$

Pour chacune de ces valeurs de $s$, on a

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = s(x^2+y^2) + \frac{[(a-s)x - by]^2}{a-s},$$

et l'équation de la conique s'écrit

$$(2)\quad s(x^2+y^2)+\frac{[(a-s)x+by]^2}{a-s}+2dx+2ey+f=0.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}&s[(x-\alpha)^2+(y-\beta)]^2\\&\quad=-\frac{[(a-s)x+by]^2}{a-s}\\&\qquad-2(d+s\alpha)x-2(e+s\beta)y+s(\alpha^2+\beta^2)-f.\end{aligned}$$

Désignons $(a-s)x+by$ par P. La fonction linéaire

$$(d+s\alpha)x+(e+s\beta)y$$

ne différera de P que par le facteur constant

$$\frac{d+s\alpha}{a-s},$$

si l'on a

$$(3)\quad \frac{d+s\alpha}{a-s}=\frac{e+s\beta}{b};$$

et alors l'équation de la conique pourra s'écrire

$$s[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]=-\frac{P^2}{a-s}-2\frac{d+s\alpha}{a-s}P+s(\alpha^2+\beta^2)-f,$$

et l'on voit que c'est seulement dans ce cas que le second membre pourra être un carré parfait, sous la condition

$$(4)\quad (d+s\alpha)^2+s(a-s)(\alpha^2+\beta^2)-f(a-s)=0.$$

C'est, du reste, la condition nécessaire et suffisante pour que le point $\alpha$, $\beta$ soit un foyer. Donc on obtient les foyers par la résolution des équations (1), (3) et (4).

La première donne deux valeurs pour $s$; ensuite, à chaque valeur de $s$ correspondent deux foyers qui sont situés sur la droite (3) et la conique (4).

L'équation (3) représente les deux axes de la conique, lorsqu'on y remplace $s$ successivement par les deux racines de l'équation (1). Si l'on veut avoir l'excentricité, rien n'est plus facile. Il suffit de remarquer que le second membre de la conique peut s'écrire, dans le cas où le point $\alpha$, $\beta$ est un foyer,

$$-\frac{(P+K)^2}{a-s},$$

K étant une constante; ou bien

$$-\frac{(a-s)^2+b^2}{a-s}\left[\frac{P+K}{\sqrt{(a-s)^2+b^2}}\right]^2,$$

la parenthèse représentant la distance du point $x$, $y$ à la directrice $P+K=0$. Donc, en désignant par $\rho$ la distance d'un point de la conique au foyer, par $d$ sa distance à la directrice, on a

$$\rho^2=\frac{(a-s)^2+b^2}{s(s-a)}d^2.$$

Donc le carré de l'excentricité $e^2$ est donné par

$$(5)\qquad e^2=\frac{\rho^2}{d^2}=\frac{(a-s)^2+b^2}{s(s-a)}.$$

Remplaçons $b^2$ par $(a-s)(c-s)$, dans cette expression, et nous aurons

$$(6)\qquad e^2=2-\frac{a+c}{s}.$$

On tire de là

$$s=\frac{a-c}{2-e^2},$$

et, en partant de l'équation (1),

$$(7)\quad (b^2-ac)e^4-[4b^2+(a-c)^2]e^2+4b^2+(a-c)^2=0.$$

Telle est l'équation qui donne les deux valeurs de $e^2$, l'une relative aux foyers réels, et l'autre relative aux foyers imaginaires.

Cette équation a toujours ses deux racines réelles; dans le cas de l'ellipse, l'une est positive, celle qui répond aux foyers réels, et l'autre est négative, celle qui répond aux foyers imaginaires; dans le cas de l'hyperbole, ces deux valeurs de $e^2$ sont positives. Si l'on désigne par $e^2$ la valeur qui répond aux foyers réels et par $e'^2$ la seconde, on a

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1; \tag{8}$$

d'où

$$e'^2 = \frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

De l'équation (8) il résulte que, dans le cas de l'ellipse, $e^2$ est inférieur à 1, tandis que dans le cas de l'hyperbole $e^2$ et $e'^2$ sont tous deux supérieurs à 1.

Cette méthode permet aussi d'obtenir l'équation générale des cercles doublement tangents à la conique. En effet, on peut écrire l'équation de la conique ainsi

$$\begin{aligned} &s[(x-\alpha^2)+(y-\beta^2)+\gamma] \\ &\quad = -\frac{P^2}{a-s} - 2(a+s\alpha)x - 2(e+s\beta)y + s(\alpha^2+\beta^2+\gamma) - f; \end{aligned}$$

et le second membre est un carré parfait sous les deux conditions

$$\frac{d+s\alpha}{a-s} = \frac{e+s\beta}{b} \tag{3}$$

et

$$(d-s\alpha)^2 + (a-s)[s(\alpha^2+\beta^2+\gamma) - f] = 0. \tag{9}$$

De la deuxième on tire

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = \frac{f}{s} + \frac{(d+s\alpha)^2}{s(s-a)};$$

et, en portant dans le premier membre de l'équation de la conique, on obtient pour équation du cercle cherché

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \frac{f}{s} + \frac{(d + s\alpha)^2}{s(s - a)} = 0,$$

sous les conditions (1) et (3).

L'équation (3) donne

$$\beta = -\frac{e}{s} + \frac{b(d + s\alpha)}{s(a - s)};$$

donc l'équation générale des cercles doublement tangents à la conique est

$$(1)\quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\left[\frac{b(d + s\alpha)}{s(a - s)} - \frac{e}{s}\right]\beta + \frac{f}{s} + \frac{(d + s\alpha)^2}{s(s - a)} = 0.$$

Dans cette équation, $s$ peut prendre les deux valeurs données par l'équation (1), et $\alpha$ est un paramètre arbitraire. Il y a donc deux séries de cercles doublement tangents à une conique, et l'équation (3) montre que les centres des cercles de chacune de ces séries décrivent, pour l'une, l'un des axes, et pour l'autre, l'autre axe.

En outre, si l'on désigne par C le premier membre de l'équation d'un cercle, dans lequel le coefficient de $x^2 + y^2$ est égal à 1, par Q le premier membre de l'équation d'une droite mise sous la forme normale, l'équation générale des coniques doublement tangentes à C, aux deux points où $Q = 0$ la coupe, est

$$C - e^2 Q^2 = 0$$

ou

$$C - e'^2 Q^2 = 0,$$

suivant que l'axe qui passe au centre de C est l'axe focal, ou non.

Cette méthode peut, dans certains cas, donner facilement un lieu de foyers. Elle s'applique très aisément au problème suivant :

*Trouver le lieu des foyers des coniques qui sont doublement tangents à deux cercles.*

Elle peut aussi donner facilement l'équation générale des directrices, car cette équation est

$$P + K = 0 \quad \text{et} \quad K = d + s\alpha.$$

Donc l'équation générale des directrices est

$$(a - s)x + by + d + s\alpha = 0, \tag{11}$$

dans laquelle $\alpha$ est un paramètre arbitraire et $s$ une racine de l'équation (1). Il y a deux séries de directrices.

Cette Note, où rien de nouveau sans doute ([1]) n'est exposé, a été rédigée surtout pour les élèves de Mathématiques spéciales. On peut, par une méthode analogue, chercher les foyers des surfaces du second degré ; mais, ceci étant de peu d'utilité pour les élèves et n'ayant pas grande valeur théorique, il est inutile que j'insiste là-dessus.