NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

MAURICE D'OCAGNE

Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan : coordonnées parallèles et coordonnées axiales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 110-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__110_0>

ÉTUDE DE DEUX SYSTÈMES SIMPLES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES DANS LE PLAN : COORDONNÉES PARALLÈLES ET COORDONNÉES AXIALES

(FIN)

(Voir 3e série, t. III, p. 54[illegible])

Par M. Maurice D'OCAGNE,
Élève-Ingénieur des Ponts et Chaussées.

IX. — Exposé d'une méthode de transformation (¹).

31. Si, dans les équations d'un problème traité en coordonnées rectangulaires, on remplace x et y par u et v, on tombera sur une proposition corrélative, en coordonnées parallèles.

Pour les propriétés descriptives, on retrouve les théorèmes que donne la méthode des polaires réciproques; nous ne nous y arrêterons pas. Mais la transformation des propriétés *segmentaires, angulaires* et *barycentriques* conduit à des particularités assez intéressantes que nous allons signaler.

Définitions et Principes.

52. Nous représenterons les points par des lettres majuscules, les droites par des minuscules. Un point sera parfois désigné par les noms de deux droites s'y coupant, et une droite par les noms de deux de ses points.

La lettre représentative $\left\{\begin{array}{l}\text{d'un point}\\ \text{d'une droite}\end{array}\right\}$, mise entre

---

(¹) Cette méthode appartient à la famille des *transformations gauches réciproques* du premier degré.

parenthèses, désignera la courbe $\left\{\begin{matrix}\text{engendrée}\\ \text{enveloppée}\end{matrix}\right\}$ par $\left\{\begin{matrix}\text{ce point}\\ \text{cette droite}\end{matrix}\right\}$.

Une courbe pourra être aussi considérée indépendamment $\left\{\begin{matrix}\text{du point}\\ \text{de la droite}\end{matrix}\right\}$ qui $\left\{\begin{matrix}\text{l'engendre}\\ \text{l'enveloppe}\end{matrix}\right\}$; elle sera alors représentée par une lettre spéciale.

Les deux systèmes que nous allons comparer sont ainsi constitués :

Le système de coordonnées rectangulaires comprend un *point origine* O par où passent deux *axes coordonnés* rectangulaires x et y. Les x se comptent sur l'axe x, à partir de point O, les y sur l'axe y, à partir du point O.

Le système de coordonnées parallèles comprend un *axe origine* o sur lequel sont les *points coordonnés* X et Y. Les u se comptent sur la perpendiculaire à l'axe o menée par le point Y, et à partir de ce point, les v sur la perpendiculaire à l'axe o menée par le point X, et à partir de ce point (1).

On a ainsi :

Coordonnées du point O	Coordonnées de l'axe o
$x = 0, \quad y = 0.$	$u = 0, \quad v = 0,$
Équation de l'axe x	Équation du point X
$y = 0.$	$v = 0.$
Equation de l'axe y	Équation du point Y
$x = 0.$	$u = 0.$

(1) Il semble naturel, au premier abord, d'accoupler, d'après l'ordre alphabétique, la lettre u avec la lettre X et la lettre v avec la lettre Y; mais, pour que le point coordonné X soit corrélatif de l'axe coordonné x, il faut que son équation soit corrélative de celle de cet axe, qui est $y = 0$; l'équation du point X doit donc être $v = 0$, c'est-à-dire que les v doivent se compter à partir de X, et, par suite, les u à partir de Y.

Au point A défini par x_1 et y_1 correspondra la droite a pour laquelle $u_1 = x_1$ et $v_1 = y_1$.

Droite divisant le système de deux autres dans un rapport donné.

53. Si, sur la droite qui joint deux points donnés A et B, nous prenons un point P, tel que $\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = k$ (le paramètre k portant son signe), nous disons que le point P divise le segment AB dans le rapport k, et si (x_1, y_1) (x_2, y_2) sont les coordonnées rectangulaires des points A et B, les coordonnées rectangulaires du point P seront

$$x' = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y' = \frac{y_1 - ky^2}{1 - k}.$$

Prenons maintenant deux droites $a(u_1, v_1)$ et $b(u_2, v_2)$, rapportées à notre système de coordonnées parallèles, et coupons-les par une parallèle aux droites Yu et Xv; soient A le point où cette droite coupe a, B le point où elle coupe b; prenons le point P qui divise le segment AB dans le rapport k; lorsque l'on fera varier la droite AB, en la laissant parallèle à Yu, le point P engendrera une droite p qui passera par le point de concours des droites a et b et dont les coordonnées seront précisément

$$u' = \frac{u_1 - ku_2}{1 - k}, \quad v' = \frac{v_1 - kv_2}{1 - k}.$$

Aussi, par analogie avec ce qui précède, dirons-nous que *la droite p divise le système* (ab) *dans le rapport* k et exprimerons-nous ce fait par l'égalité $\left(\frac{pa}{pb}\right) = k$.

Dès lors, nous voyons que, *si le point* P *divise le segment* AB *dans le rapport k, la droite p corrélative de* P *divise le système* (ab) *corrélatif de* AB *dans le même rapport*.

Ce principe renferme toute la transformation des propriétés segmentaires.

En particulier, si $k = -1$, le point P est le *milieu du segment* AB ou le *point moyen des points* A *et* B, et de même la droite p sera dite *médiane du système* (ab) ou *droite moyenne des droites a et b.*

Points parallèles.

34. Prenons maintenant, en coordonnées rectangulaires, la droite a dont l'équation est

$$y = mx + n.$$

Le coefficient m, égal à la tangente de l'angle que fait la droite a avec l'axe x, définit la direction de cette droite, c'est-à-dire que toutes les droites qui correspondent à une même valeur de M concourent en un même point de la droite à l'infini du plan; ces droites sont dites parallèles.

Soit alors A le point corrélatif, dont l'équation en coordonnées parallèles est

$$v = mu + n.$$

D'après ce que nous avons vu en traitant de l'équation du point (n° 11), si nous menons par le point A une parallèle à Xv, qui coupe l'axe o au point A', nous avons

$$m = \frac{A'X}{A'Y};$$

par suite, tous les points qui correspondent à une même valeur de m sont distribués sur une même parallèle aux droites Yu et Xv; nous dirons par analogie que ces points sont *en relation de parallélisme* ou plus simplement *parallèles* [1].

[1] Cette définition et celles qui suivent n'ont d'autre objet que d'abréger le langage dans le cours du présent travail.

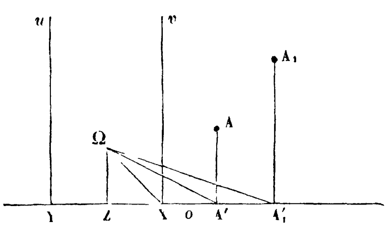
Si donc on veut déterminer sur une droite donnée le point parallèle d'un point donné, on prendra l'intersection de la droite et de la parallèle à Xv menée par le point.

Module angulaire d'un point.

55. Il ne suffisait pas, pour pouvoir transformer les propriétés angulaires des systèmes de droites, de voir (ce qui d'aillleurs ne présentait pas la moindre difficulté) quelle était, en coordonnées parallèles, la relation entre les points équivalente au parallélisme entre les droites : il fallait encore reconnaître quel élément commun à deux points répondait à l'angle de deux droites, afin de pouvoir étendre aux systèmes de points les relations d'angles établies pour les systèmes de droites; cette dernière recherche présente au premier abord quelque difficulté; mais nous croyons qu'elle devient des plus aisées par l'introduction de l'élément que nous appelons le *module angulaire d'un point*.

56. Voici comment nous définissons cet élément (*fig.* 12) :

Fig. 12.



Étant donné le point A dont l'équation est

$$v = mu + n,$$

prenons le point parallèle A′ situé sur l'axe o; nous avons

$$m = \frac{A'X}{A'Y}.$$

Par le milieu Z de XY menons une parallèle à Yu et Xv et prenons sur cette droite la longueur

$$Z\Omega = ZX = \frac{XY}{2};$$

l'égalité précédente peut s'écrire

$$m = \frac{A'Z - XZ}{A'Z + ZY} = \frac{A'Z - Z\Omega}{A'Z + Z\Omega} = \frac{\frac{A'Z}{Z\Omega} - 1}{\frac{A'Z}{Z\Omega} + 1} = \frac{\operatorname{tang} A'\Omega Z - 1}{\operatorname{tang} A'\Omega Z + 1};$$

mais, $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}$ étant égal à 1, on peut aussi bien écrire

$$m = \frac{\operatorname{tang} A'\Omega Z - \operatorname{tang}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tang} A'\Omega Z \operatorname{tang}\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tang}\left(A'\Omega Z - \frac{\pi}{4}\right);$$

or, ZΩ étant égal à ZX, l'angle XΩZ est égal à $\frac{\pi}{4}$; par suite,

$$m = \operatorname{tang} A'\Omega X.$$

Cet angle A′ΩX, qui est le même pour tous les points de la droite AA′, c'est-à-dire pour tous les points parallèles à A, sera dit *module angulaire* de ces points.

Le point Ω, qui est invariable, recevra le nom de *pôle* du système de coordonnées parallèles considéré, et la droite ΩX, également fixe, celui d'*axe polaire* de ce système.

De ces définitions résulte la règle suivante : pour avoir le *module angulaire* d'un point donné A, il faut prendre, sur l'axe o, le point parallèle A′, et le joindre au *pôle* Ω; l'angle que la droite ΩA′ fait avec l'*axe polaire* ΩX est précisément le *module angulaire* cherché.

On voit, en outre, que le module angulaire d'un point est égal à l'angle que fait avec l'axe x la droite corrélative, en coordonnées rectangulaires.

Angle de deux points.

57. Soient A et A_1 (*fig.* 12) deux points dont les équations respectives sont

$$v = mu + n$$

et

$$v = m_1 u + n_1.$$

Prenons sur l'axe o les points A' et A'_1, parallèles aux deux premiers. L'angle $A'\Omega A'_1$ est égal à la différence des modules angulaires des deux points, et nous avons

$$\operatorname{tang} A'\Omega A'_1 = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}.$$

Nous appellerons cet angle $A'\Omega A'_1$ *angle des points* A *et* A_1.

Pour tous les points situés sur une même parallèle aux axes Xv et Yu, cet angle est nul. Il est le même pour deux points quelconques pris respectivement sur deux parallèles fixes aux axes Xv et Yu.

Si nous prenons maintenant en coordonnées rectangulaires les droites dont les équations sont

$$y = mx + n,$$
$$y = m_1 x + n_1,$$

l'angle de ces deux droites nous est donné par

$$\operatorname{tang} V = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1}.$$

Nous voyons donc que *l'angle de deux points, en coordonnées parallèles, est égal à l'angle des deux droites corrélatives en coordonnées rectangulaires.*

38. Ce théorème nous permettra de transformer les théorèmes, établis en coordonnées rectangulaires, où entrent des relations d'angles. Nous le compléterons par la remarque suivante :

Si les points A *et* A_1 *se déplacent d'une manière quelconque dans le plan, mais en conservant un angle constant, les points* A′ *et* A'_1 *marquent sur l'axe o des divisions homographiques.*

En effet, θ étant l'angle constant des points A et A_1, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\dfrac{ZA'_1}{\Omega Z} - \dfrac{ZA'}{\Omega Z}}{1 - \dfrac{ZA'_1 \times ZA'}{\Omega Z^2}},$$

ou, en représentant le segment de longueur constante ΩZ par δ,

$$ZA' \times ZA'_1 - \frac{\delta}{\operatorname{tang}\theta}\, A'A'_1 - \delta^2 = 0,$$

ce qui démontre le théorème. De plus, le terme constant δ^2 étant indépendant de l'angle θ, on voit que les points doubles des divisions homographiques, correspondant aux diverses valeurs de θ, sont fixes; ces points sont d'ailleurs imaginaires.

39. Supposons que les points A et A_1 se déplacent sur une droite, la propriété homographique étant projective, ces points détermineront également sur cette droite deux divisions homographiques. D'ailleurs les droites corrélatives de ces points passeront par un point fixe; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Si, en coordonnées rectangulaires, on a deux systèmes de droites $a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots,$ *issues d'un même point* P, *et telles que les droites correspon-*

dantes a et a_1, b et b_1, c et c_1, ... fassent un angle constant, on aura corrélativement, en coordonnées parallèles, deux divisions A, B, C, ..., A_1, B_1, C_1, ..., *situées sur une même droite p et qui seront en homographie.*

On peut encore dire :

Si un angle constant de côtés a et b tourne autour de son sommet P, *les points corrélatifs* A *et* B *des droites a et b marquent sur la droite p corrélative du point* P *deux divisions homographiques.*

De tout ce qui précède résulte un moyen de transformer les propriétés angulaires relatives à un système de droites quelconques situées dans un plan, et d'en déduire des propriétés homographiques lorsque ces droites passent par un même point.

Points perpendiculaires.

60. Si nous supposons que l'angle de deux points, défini comme il vient d'être fait, soit droit, nous dirons que ces points sont en *relation de perpendicularité* ou plus simplement *perpendiculaires.*

Remarquons que ce genre de relation entre deux points dépend essentiellement du choix des axes de coordonnées.

Soient A et A_1 deux points perpendiculaires quelconques, A' et A'_1 les points parallèles aux premiers, qui sont situés sur l'axe o; la relation homographique, établie plus haut, qui lie les points A' et A'_1, devient dans ce cas

$$ZA' \times ZA'_1 + \delta^2 = o,$$

c'est-à-dire que *ces points sont en involution.*

Le point Z est le point central de cette involution.

61. Pour trouver sur une droite d le point perpendiculaire à un point donné A, voici comment on procédera : prendre sur l'axe o le point A' parallèle à A, et, dans l'involution qui vient d'être définie, le conjugué B' de A', prendre enfin sur la droite d le point B parallèle à B', en tirant BB' parallèlement à $X\nu$ et Yu; le point B sera le point cherché.

Pour déduire, dans cette construction, le point B' du point A', il suffit de joindre le point A' au pôle Ω du système, et de mener par le point Ω une perpendiculaire $\Omega B'$ à $\Omega A'$ jusqu'à sa rencontre B' avec l'axe o.

62. Comme précédemment, on voit que, *si un angle droit de côtés a et b tourne autour de son sommet* P, *les points* A *et* B, *corrélatifs des droites a et b, marquent sur la droite p, corrélative du point* P, *deux divisions en involution.*

Remarques sur la transformation des coniques.

63. Si, dans l'équation en coordonnées rectangulaires d'une conique Γ, on remplace x et y par u et ν, on obtient l'équation de la conique corrélative Γ_1, en coordonnées parallèles.

A chaque point de la conique Γ correspond naturellement une tangente de la conique Γ_1 et réciproquement. Si sur une tangente à la conique Γ_1 on prend le point perpendiculaire au point de contact, on a l'élément corrélatif de la normale à la conique Γ; aussi ce point sera-t-il dit *point normal.*

Aux asymptotes de Γ correspondent dans Γ_1 les points de contact des tangentes parallèles à $X\nu$ et Yu; nous appellerons ces points les *points asymptotes*.

Aux foyers de Γ correspondent pour Γ_1 deux droites, dépendant, bien entendu, du choix des axes, et telles que leurs points d'intersection (imaginaires) avec cette conique sont respectivement parallèles aux points qui divisent le segment XY dans les rapports

$$\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}.$$

Nous appellerons ces droites les *droites focales*.

Soit d une droite qui coupe la conique Γ aux points A et B; du point D, corrélatif de d, partiront deux droites a et b, corrélatives de A et B, et qui seront tangentes à la conique Γ_1; lorsque la droite d se déplacera parallèlement à elle-même, le point D se déplacera sur une parallèle à Yu, et, comme le milieu du segment AB décrira une droite d', la droite moyenne du système (ab) passera par un point fixe D'.

Le point D', ainsi obtenu corrélativement du diamètre d', sera dit *point diamétral*.

Tous les diamètres d' passant par le centre de Γ, tous les points diamétraux D' seront sur une même droite, dite *droite centrale*, dont les coordonnées seront données par le système d'équations $F'_u = 0$, $F'_v = 0$.

A deux diamètres conjugués de Γ correspondent deux *points diamétraux conjugués* de Γ_1. Les deux points diamétraux de Γ_1, qui sont entre eux à angle droit, sont corrélatifs des axes de Γ, et recevront pour cette raison le nom de *points axiaux*.

64. Nous nous arrêterons là de ces analogies; on voit qu'il est très aisé, étant donné un élément quelconque de la conique Γ, de trouver l'élément corrélatif de la conique Γ_1.

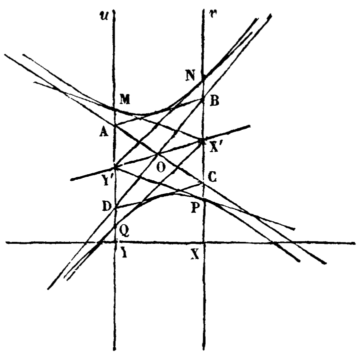
65. Disons un mot maintenant des coniques représentées, en coordonnées parallèles, par certaines équations simplifiées de coniques en coordonnées rectangulaires, après remplacement de x et y par u et v.

66. Prenons l'équation corrélative de celle du cercle en coordonnées rectangulaires

$$(u-a)^2+(v-b)^2=c^2;$$

elle représente une hyperbole (*fig.* 13) dont le centre O est à la rencontre de la droite équidistante de Yu et Xv,

Fig. 13.



et de la droite X'Y' dont les coordonnées sont $u=a$, $v=b$: cette droite X'Y' est la *droite centrale* de l'hyperbole. Portant sur les axes de coordonnées, de part et d'autre de X'Y', les segments

$$Y'A = Y'D = X'B = X'C = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

on détermine les asymptotes AC et BD; les droites AB et CD sont tangentes à l'hyperbole; si cette courbe coupe les axes aux points M, N, P, Q, on a

$$Y'M = Y'Q = X'N = X'P = c;$$

les tangentes en M et en Q passent par le point X', les tangentes en N et en P par le point Y'.

Nous désignerons, en raison de leur équation, les hyperboles ainsi placées par rapport aux axes, sous le nom d'*hyperboles corrélatives de cercles*, et nous pourrons dire d'une manière générale qu'*une hyperbole corrélative de cercle est une hyperbole telle que les axes* Yu *et* Xv *soient tangentes à son hyperbole complémentaire.*

De même que trois conditions suffisent à déterminer un cercle, trois conditions suffisent à déterminer une hyperbole corrélative de cercle. En particulier, il n'existe qu'une hyperbole corrélative de cercle inscrite à un triangle.

67. Prenons maintenant l'équation

$$v^2 - u^2 = a^2,$$

dont la corrélative, en coordonnées rectangulaires, représente une hyperbole équilatère rapportée à ses axes. On voit, toujours en appliquant les règles du Chapitre IV, que cette équation représente une parabole ayant son axe dirigé suivant XY, son sommet situé au milieu du segment XY, et qui coupe l'axe Xv en des points M et N tels que XM $=$ XN $= a$.

Il résulte de là que, si la distance XY des points origines est égale à $2a$, le point X est foyer de la parabole.

68. Enfin, l'équation corrélative de l'équation réduite de la parabole $y^2 = 2px$, c'est-à-dire

$$v^2 = 2pu,$$

représente une hyperbole tangente à XY au point Y et ayant pour asymptotes d'une part l'axe Xv, de l'autre la droite dont les coordonnées sont $u = \frac{p}{2}$, $v = p$. Nous avons déjà vu, d'ailleurs (n° 25), que la courbe en u et v pour laquelle $B^2 - AC = 0$, c'est-à-dire qui est corrélative de la parabole, est une hyperbole ayant une asymptote parallèle à Xv et Yu.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet et nous allons passer maintenant aux applications ([1]).

X. — Applications.

Transformations des propriétés segmentaires.

69. Prenons d'abord ce théorème :

Deux droites parallèles sont coupées par trois droites AA′, BB′, CC′, *l'une aux points* A, B, C, *l'autre aux points* A′, B′, C′; *si l'on a*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'},$$

les trois droites AA′, BB′, CC′ *concourent en un même point.*

69′. Théorème corrélatif :

Deux points parallèles (n° 54) *sont joints à trois points* aa', bb', cc', *l'un par les droites* a, b, c, *l'autre par les droites* a', b', c'; *si l'on a* (n° 53)

$$\left(\frac{ab}{a'b'}\right) = \left(\frac{ac}{a'c'}\right),$$

les points aa', bb', cc' *sont en ligne droite.*

70. Soit maintenant le théorème de Ménélaüs :

Les côtés AB, BC, CA *d'un triangle étant coupés respectivement aux points* M, N, P *par une droite quelconque, on a*

$$\frac{MA}{MB}\,\frac{NB}{NC}\,\frac{PC}{PA} = -1,$$

70′. Théorème corrélatif :

Les sommets ab, bc, ca *d'un triangle étant joints respectivement par les droites* m, n, p *à un point quelconque, on a* (n° 53)

$$\left(\frac{ma}{mb}\right)\left(\frac{nb}{nc}\right)\left(\frac{pc}{pa}\right) = -1.$$

71. Théorème de Jean de Céva :

On joint les sommets A, B, C *d'un triangle à un point quelconque; les droites ainsi menées*

71′. Théorème corrélatif :

On coupe les côtés a, b, c *d'un triangle par une droite quelconque; les points ainsi obtenus déter-*

([1]) Dans les applications qui suivent, on trouvera, à côté de théorèmes nouveaux, d'autres propriétés connues; mais notre but n'est ici que de bien mettre en relief l'esprit de la méthode.

déterminant sur les côtés opposés respectivement les points M, N, P, *on a*

$$\frac{MB}{MC}\,\frac{NC}{NA}\,\frac{PA}{PB} = 1.$$

Corollaire :

Les médianes (droites qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés) concourent au même point.

72. Prenons maintenant ce théorème :

Dans une conique, le point de contact d'une tangente quelconque est le milieu du segment déterminé par les points où cette tangente coupe les asymptotes.

minant avec les sommets opposés respectivement les droites m, n, p *on a* (n° 53),

$$\left(\frac{mb}{mc}\right)\left(\frac{nc}{na}\right)\left(\frac{pa}{pb}\right) = 1.$$

Corollaire :

Les points d'intersection des côtés et des droites moyennes (n° 53) *des systèmes de côtés opposés sont en ligne droite* (1).

72'. Théorème corrélatif :

Dans une conique, la tangente en un point quelconque est la droite moyenne (n° 53) *du système formé par les droites qui joignent ce point aux points asymptotes* (n° 63).

Nous placerons ici une remarque : les définitions que nous avons posées sont fort utiles pour opérer ces déductions corrélatives de théorèmes connus, mais les énoncés qui en résultent peuvent être modifiés en remontant au sens contenu dans ces définitions. Ainsi le théorème précédent deviendra :

On joint un point quelconque M *d'une conique aux extrémités* A *et* B *d'un diamètre de cette conique; le point que la tangente en* M *détermine sur une droite de direction conjuguée à la direction* AB *est le milieu*

(1) Ce théorème peut s'énoncer ainsi : *Un triangle détermine, sur une transversale quelconque, trois segments; les milieux de ces segments sont joints aux sommets opposés dans le triangle, par des droites qui donnent trois points sur le périmètre de ce triangle. Ces trois points sont en ligne droite.* La démonstration directe de ce théorème est très facile.

du segment déterminé sur cette droite par les droites MA *et* MB.

73. Prenons encore ce théorème :

Une droite quelconque coupe une conique en deux points; en ces points on mène les tangentes à la conique; ces tangentes déterminent sur l'une des asymptotes un segment dont le milieu est sur la droite donnée.

73′. Théorème corrélatif :

Par un point quelconque on mène deux tangentes à une conique; les points de contact de ces tangentes joints à l'un des points asymptotes (n° 63) *forment un système de deux droites dont la droite moyenne passe par le point donné.*

Ce dernier théorème corrélatif peut s'interpréter ainsi :

D'un point M *on mène à une conique les tangentes* MP *et* MQ *qui touchent cette conique aux points* P *et* Q; *on joint les points* M, P *et* Q *à un point quelconque* A *de la conique; une droite, de direction conjuguée à la direction du diamètre qui passe au point* A, *coupe les droites* AM, AP, AQ *respectivement aux points* M′, P′, Q′; *le point* M′ *est le milieu du segment* P′Q′.

Autrement dit : *Les droites* AP, AM, AQ *et la tangente à la conique au point* A *forment un faisceau harmonique.*

Si l'on suppose que le point M s'éloigne à l'infini, on retombe sur le théorème énoncé plus haut.

Ces quelques exemples suffisent à montrer comment s'opère la transformation des propriétés segmentaires; passons maintenant aux propriétés angulaires.

Transformation des propriétés angulaires.

74. Nous rappellerons en commençant que nous nommons *point normal* à une courbe pour une tangente

donnée le point, pris sur cette tangente, qui est perpendiculaire au point de contact. Le point normal est corrélatif de la normale. La courbe qu'il décrit est corrélative de la développée et, par suite, la tangente à cette courbe corrélative du centre de courbure.

Voyons maintenant quelques exemples de transformations :

75. Théorème des trois hauteurs :

Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés concourent au même point.

75'. Théorème corrélatif :

Les points pris sur les trois côtés d'un triangle et qui sont perpendiculaires (n° 60) *aux sommets opposés sont en ligne droite.*

Nous appellerons ces points *points hauteurs.*

76. Théorème :

Toutes les normales à un cercle passent par le centre de ce cercle.

76'. Théorème corrélatif :

Tous les points normaux (n° 76) *à une hyperbole corrélative de cercle* (n° 66) *sont sur la ligne centrale* (n° 63) *de cette hyperbole.*

77. Théorème :

Si deux droites variables tournant chacune autour d'un point fixe sont constamment à angle droit, leur point de rencontre décrit un cercle.

Le centre de ce cercle est le milieu du segment qui joint les deux points fixes.

77'. Théorème corrélatif :

Si deux points variables décrivant chacun une droite fixe sont constamment à angle droit (n° 60), *la droite qui les joint enveloppe une hyperbole corrélative de cercle* (n° 66).

La ligne centrale de cette hyperbole est la droite moyenne du système formé par les deux droites fixes.

78. Théorème :

Les perpendiculaires élevées aux trois côtés d'un triangle par les milieux de ces côtés se cou-

78'. Théorème corrélatif :

Les points perpendiculaires aux trois sommets d'un triangle et qui sont pris sur les droites moyennes *pent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit.*

79. Théorème :

Les pieds des hauteurs d'un triangle, sur les trois côtés, et les milieux de ces côtés sont sur un même cercle.

Ce cercle est le *cercle des neuf points;* on sait quels sont tous les points remarquables, en assez grand nombre, qu'il contient.

80. Théorème de Simson :

On prend un point M *sur le cercle* (M) *circonscrit à un triangle, de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés du triangle; les pieds de ces perpendiculaires sont sur une droite d.*

Si les points M *et* M_1 *sont tels que le centre du cercle* (M) *soit le milieu du segment* MM_1, *les droites correspondantes d et* d_1 *sont perpendiculaires.*

La courbe décrite par le point de rencontre des droites perpendiculaires d et d_1, *lorsque les points* M *et* M_1 *se déplacent sur le*

des systèmes formés par les côtés se croisant en ces sommets sont sur une même droite qui est la ligne centrale de l'hyperbole, corrélative de cercle, inscrite (n° 66, dernier alinéa).

79′. Théorème corrélatif :

Les droites qui joignent les points-hauteurs (n° 77′) *d'un triangle aux sommets opposés et les droites moyennes des systèmes de droites formés par les côtés pris deux à deux sont tangentes à une même hyperbole corrélative de cercle.*

Cette hyperbole, que nous appellerons *hyperbole des neuf droites,* est tangente à toutes les droites corrélatives des points remarquables situés sur le cercle des neuf points.

80′. Théorème corrélatif :

On prend une tangente m à l'hyperbole corrélative de cercle (*m*) *inscrite à un triangle; sur cette tangente, on prend les points perpendiculaires aux trois sommets du triangle et on les joint respectivement à ces sommets par des droites; ces trois droites concourent en un même point* D.

Si les droites m et m_1 *sont telles que la ligne centrale de l'hyperbole* (*m*) *soit la droite moyenne du système* (mm_1), *les points correspondants* D *et* D_1 *sont perpendiculaires.*

La courbe enveloppée par la

cercle (M), *est le cercle des neuf points du triangle donné* [1].

81. Théorème de Frégier :

Deux droites perpendiculaires d *et* d' *tournent autour d'un point* M *pris sur une conique; ces droites coupent respectivement la conique aux points* P *et* P' : *la droite* PP' *passe par un point fixe situé sur la normale à la conique au point* M.

droite qui joint les points perpendiculaires D *et* D_1, *lorsque les droites* m *et* m_1 *se déplacent tangentiellement à l'hyperbole* (m) *est l'hyperbole des neuf droites du triangle donné.*

81'. Théorème corrélatif :

Deux points perpendiculaires D *et* D' *se déplacent sur une tangente* m *à une conique; de ces points on mène à la conique les tangentes* p *et* p'; *le point* pp' *décrit une droite qui passe par le point normal* (n° 76) *à la conique situé sur la tangente* m.

La réciproque de ce théorème corrélatif peut, en vertu d'une remarque qui a été faite plus haut, s'énoncer ainsi :

Les tangentes à une conique, issues des différents points d'une droite, marquent sur une tangente quelconque à cette conique des points en involution. Dans cette involution, le point de rencontre de la droite et de la tangente considérée est conjugué du point de contact de la tangente. C'est une propriété connue.

Le théorème qui termine le n° 34 est un cas particulier du précédent, lorsqu'on prend la tangente parallèlement à la droite donnée.

82. Théorème :

Les trois hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se coupent en un même point de cette courbe.

82'. Théorème corrélatif :

Les trois points hauteurs d'un triangle circonscrit à une conique dont les points asymptotes sont perpendiculaires sont situés sur une même tangente à la courbe

(1) Ces deux derniers théorèmes ont été proposés comme Questions dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. II, p. 479, Question 1473).

Nous pourrions multiplier ces exemples de transformation des propriétés angulaires au moyen de notre méthode; mais nous pensons en avoir assez dit sur ce sujet.

Note sur la transformation des propriétés barycentriques.

83. Nous avons déjà donné des exemples de cette transformation au Chapitre V. Nous demanderons la permission de faire sur ce sujet une petite remarque.

La droite que nous avons appelée *moyenne* d'un système de droites (nº 5) peut recevoir une définition géométrique indépendante du système spécial de coordonnées que nous envisageons; la voici :

La droite moyenne, par rapport à une direction donnée d'un système de droites situées d'une manière quelconque dans un plan, est le lieu du centre des moyennes distances des points où les droites données sont coupées par une sécante parallèle à la direction donnée.

Les coordonnées parallèles permettront évidemment de déduire toutes les propriétés de cet élément géométrique des propriétés établies en coordonnées ordinaires pour le centre de gravité d'un système de points.

84. Un seul exemple, joint à ceux qui ont déjà été donnés (nº 37), suffira à faire comprendre la manière d'opérer cette transformation.

Coordonnées rectangulaires :	Coordonnées parallèles :
Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique et circonscrit à une parabole, son centre de gravité décrit une ligne droite.	*Quand un triangle se déplace en restant circonscrit à une conique et inscrit dans une hyperbole ayant une asymptote parallèle à* Y*u et* X*v* [1]*, la droite moyenne de ses trois côtés passe par un point fixe.*

[1] Voir nº 68

Ce théorème corrélatif pourra s'énoncer plus simplement :

Quand un triangle se déplace en restant circonscrit à une conique et inscrit dans une hyperbole H, *la droite moyenne de ses trois côtés, relativement à l'une ou l'autre des directions asymptotiques de l'hyperbole* H, *passe par un point fixe.*

85. On voit qu'on a ainsi un moyen d'obtenir sans calcul une série de théorèmes intéressants.

C'est, en particulier, par cette méthode que nous sommes arrivé à tous les théorèmes donnés sans démonstration dans notre Note *Sur la droite moyenne d'un système de droites* (¹). Nous avons, dans les transformations qui nous ont conduit à ces théorèmes, fait usage de plusieurs des principes qui viennent d'être exposés. Aussi renverrons-nous le lecteur à ce travail.

Résumé.

86. La méthode qui vient d'être développée permet, étant donnée une propriété *segmentaire, angulaire* ou *barycentrique* quelconque, d'en déduire immédiatement et sans calcul une propriété corrélative. Nous avons vu, en outre, quelles étaient les remarques qui permettaient de traduire l'énoncé de ces théorèmes en faisant abstraction de la considération des coordonnées parallèles qui auraient servi à les obtenir.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XII, p. 114.