

ESCARY

Remarque concernant la limite de $(1 + \frac{1}{m})^m$

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 4
(1885), p. 101-102

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__101_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUE CONCERNANT LA LIMITE DE $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$;

PAR M. ESCARY.

Si, dans le terme général

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

du développement de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, on pose

$$m = n^2 \omega,$$

il vient

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right), \end{aligned}$$

en faisant

$$\varepsilon_i = \frac{i}{n} \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Or on peut toujours disposer de ω , et par suite de m , de manière à avoir

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{n-1} < n\omega.$$

Sous cette condition, on aura

$$\begin{aligned} 1 &> \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right) \\ &> 1 - \frac{1}{n\omega}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1}) \end{aligned}$$

ou

$$1 > \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right) > 1 - \frac{1 - \frac{1}{n}}{2\omega},$$

et l'on voit, sous cette forme, que pour des valeurs indéfiniment croissantes de ω le numérateur du terme général que nous considérons a pour limite l'unité.

Donc le nombre e est la limite d'une fonction algébrique de deux entiers m et n dont le rapport du premier au carré du second croît indéfiniment, et qui sont eux-mêmes indéfiniment croissants.

La même conclusion s'applique à l'exponentielle

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m,$$

x pouvant être réel ou imaginaire.