NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ESCARY

Remarque concernant la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 4 (1885), p. 101-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1885_3_4__101_0>

REMARQUE CONCERNANT LA LIMITE DE $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$;

PAR M. ESCARY.

Si, dans le terme général

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}$$

du développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, on pose

$$m = n^2\omega,$$

il vient

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$
$$=\left(1-\frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right),$$

en faisant

$$\varepsilon_i = \frac{i}{n} \quad \text{avec} \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1.$$

Or on peut toujours disposer de ω, et par suite de m, de manière à avoir

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{n-1} < n\omega.$$

Sous cette condition, on aura

$$1 > \left(1-\frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right)$$
$$> 1-\frac{1}{n\omega}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1})$$

ou

$$1 > \left(1-\frac{\varepsilon_1}{n\omega}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_2}{n\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon_{n-1}}{n\omega}\right) > 1-\frac{1-\frac{1}{n}}{2\omega},$$

et l'on voit, sous cette forme, que pour des valeurs indéfiniment croissantes de ω le numérateur du terme général que nous considérons a pour limite l'unité.

Donc *le nombre e est la limite d'une fonction algébrique de deux entiers m et n dont le rapport du premier au carré du second croît indéfiniment, et qui sont eux-mêmes indéfiniment croissants.*

La même conclusion s'applique à l'exponentielle

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m,$$

x pouvant être réel ou imaginaire.