Nouvelles annales de mathématiques

S. Gundelfinger

Note sur un article de M. Brisse

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 7-18

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__7_1>

NOTE SUR UN ARTICLE DE M. BRISSE;

PAR M. LE D^{r} S. GUNDELFINGER.

Votre travail, que je viens de recevoir dans les *Nouvelles Annales* de mai 1882 (p. 193-216), m'a intéressé au plus haut point, parce que vous y traitez un sujet auquel je me suis attaché moi-même depuis un certain nombre d'années, et que j'ai traité en détail dans mes cours. Jusqu'ici, j'ai malheureusement été empêché de publier les résultats de mes recherches, autant par des travaux d'un autre genre, que par le désir de traiter *toute* la théorie des surfaces du second ordre dans un Ouvrage spécial.

En raison de l'intérêt que vous portez vous-même à cette étude, je me permets de vous transmettre un court extrait de mon manuscrit.

I. — Réduction des formules primitives en coordonnées obliques.

Comme vous, Monsieur, je place aussi le point capital de cette étude dans l'introduction des coordonnées a, b, c pour déterminer une direction dans l'espace et je les appelle les *coordonnées de direction*. Par ce moyen, la transformation des formules primitives pour des coordonnées cartésiennes quelconques se fait de la façon suivante :

1. Carré du rayon vecteur (r^2) :

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(x,y) + 2xz\cos(x,z) + 2yz\cos(y,z) \\ &= c_{1,1}x^2 + 2c_{1,2}xy + \ldots + c_{3,3}z^2 \equiv \psi(x,y,z). \end{aligned}$$

2. En déplaçant le système des coordonnées parallèlement à lui-même, on obtient, pour le carré (R^2) de la distance de deux points x, y, z et x_1, y_1, z_1,

$$R^2 = \psi(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z).$$

3. Étant données deux directions par leurs coordonnées a, b, c et a_1, b_1, c_1, on cherche l'angle φ qu'elles font entre elles.

Dans le triangle formé par les points a, b, c, a_1, b_1, c_1 et l'origine des coordonnées, on a, d'après le n° 2 et le théorème de Pythagore,

$$\psi(a_1 - a, b_1 - b, c_1 - c) = 1^2 + 1^2 - 2.1.1\cos\varphi,$$

c'est-à-dire

$$\cos\nu = a_1 \tfrac{1}{2}\psi'(a) + b_1 \tfrac{1}{2}\psi'(b) + c_1 \tfrac{1}{2}\psi'(c),$$

ce qui donne, pour $\nu = 90^\circ$,

$$0 = a_1 \tfrac{1}{2}\psi'(a) + b_1 \tfrac{1}{2}\psi'(b) + c_1 \tfrac{1}{2}\psi'(c),$$

pour $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = \rho$, ...,

$$\cos(x,r) = \tfrac{1}{2}\psi'(a),$$
$$\cos(y,r) = \tfrac{1}{2}\psi'(b),$$
$$\cos(z,r) = \tfrac{1}{2}\psi'(c).$$

4. Soit un plan à une distance δ de l'origine, δ ayant pour coordonnées de direction a, b, c. Les coordonnées du pied de la normale δ sont δa, δb, δc.

Si l'on appelle R la distance d'un point quelconque (x, y, z) du plan à ce pied, et a', b', c' les coordonnées de direction de la droite qui joint les deux points (x, y, z), $(\delta a, \delta b, \delta c)$, on a

$$Ra' = x - \delta a, \quad Rb' = y - \delta b, \quad Rc' = z - \delta c;$$

d'où

$$(x - \delta a)\tfrac{1}{2}\psi'(a) + (y - \delta b)\tfrac{1}{2}\psi'(b) + (z - \delta c)\tfrac{1}{2}\psi'(c) = 0,$$

ou

$$x\tfrac{1}{2}\psi'(a) + y\tfrac{1}{2}\psi'(b) + z\tfrac{1}{2}\psi'(c) - \delta = 0,$$

pour l'équation du plan.

On peut remplacer les coefficients de x, y, z dans la dernière équation par $\cos(\delta, x)$, $\cos(\delta, y)$, $\cos(\delta, z)$. *Mais il vaut mieux conserver* $\tfrac{1}{2}\psi'(a)$, ...

5. Inversement, étant donnée une équation quelconque

$$Ax + By + Cz + d = 0,$$

on peut, par l'introduction d'un facteur proportionnel μ, déterminer a, b, c, δ par les relations suivantes :

$$\mu A = \tfrac{1}{2}\psi'(a), \quad \mu B = \tfrac{1}{2}\psi'(b), \quad \mu C = \tfrac{1}{2}\psi'(c),$$
$$\mu d = -\delta, \quad \psi(a, b, c) = 1.$$

Si l'on fait

$$[\sin^2(x, y, z) =]\, \Sigma \pm (c_{1,1}, c_{2,2}, c_{3,3}) = D, \quad \frac{\partial d}{\partial c_{1,k}} = D_{ik},$$
$$\Psi(u, v, w) = D_{1,1} u^2 + 2 D_{1,2} uv + \ldots - D_{3,3} w^2,$$

on aura

$$Da = \tfrac{1}{2}\mu\Psi'(A), \quad Db = \tfrac{1}{2}\mu\Psi'(B), \quad \ldots,$$

$\mu = \sqrt{D : \Psi(A, B, C)}$, où μ doit avoir le signe de $-d$.

6. Étant donnés deux plans

$$Ax + By + Cz + d = 0, \quad A'x + B'y + C'z + d' = 0,$$

on obtient leur angle par la formule

$$\cos v = \mu(A a_1 + B b_1 + C c_1)$$
$$\cos v = [A \tfrac{1}{2}\psi'(A_1) + B \tfrac{1}{2}\psi'(B_1) + C \tfrac{1}{2}\psi'(C_1)] : \sqrt{\Psi\Psi_1}$$

et

$$\Psi = D_{1,1} A^2 + 2 D_{1,2} AB + D_{3,3} C^2,$$
$$\Psi_1 = D_{1,1} A_1^2 + 2 D_{1,2} A_1 B_1 + \ldots.$$

7. Étant donnés trois axes rectangulaires par leurs coordonnées $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ par rapport à un système de coordonnées obliques, on a, d'une part

$$\cos(X, r) = \tfrac{1}{2}\psi'(a)\frac{x}{r} + \tfrac{1}{2}\psi'(b)\frac{y}{r} + \tfrac{1}{2}\psi'(c)\frac{z}{r},$$

d'autre part, $\cos(X, r) = X : r$; d'où, pour les formules de transformation,

$$(\alpha) \quad \begin{cases} X = \tfrac{1}{2}\psi'(a)X + \tfrac{1}{2}\psi'(b)y - \tfrac{1}{2}\psi'(c)z, \\ Y = \tfrac{1}{2}\psi'(a')X + \tfrac{1}{2}\psi'(b')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c')z, \\ Z = \tfrac{1}{2}\psi'(a'')X + \tfrac{1}{2}\psi'(b'')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c'')z. \end{cases}$$

En résolvant, on obtient des expressions de la forme

$$(\beta) \quad \begin{cases} x = aX + a'Y + a''Z, \\ y = bX - b'Y + b''Z, \\ z = cX + c'Y + c''Z. \end{cases}$$

II. — De la direction des axes principaux.

Le plan polaire d'un point quelconque x_1, y_1, z_1 par rapport à une surface du second ordre

$$f = a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + \ldots + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,4}x + \ldots + a_{4,4} = 0$$

est donné par

$$x_1 f_1 + y_1 f_2 + z_1 f_3 + f_4 = 0,$$
$$f_i = a_{i,1}x + a_{i,2}y + a_{i,3}z + a_{i,4}$$

Si l'on pose

$$x_1 = r_1 a, \quad y_1 = r_1 b, \quad z_1 = r_1 c,$$

et si l'on divise par r_1, on obtient, pour $r_1 = \infty$,

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = 0,$$

c'est-à-dire l'équation du plan diamétral conjugué de la direction a, b, c.

J'obtiens ainsi comme vous, très honoré Monsieur, les *directions* des axes principaux; mais peut-être arrive-t-on aussi un peu plus rapidement à la formule

$$\varphi(x, y, z) = SX^2 + S'Y^2 + S''Z^2$$

par le moyen suivant.

D'après le n° 7 (β), on obtient, en multipliant par $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, $a_{i,3}$,

$$\tfrac{1}{2}\varphi'(x) = S\tfrac{1}{2}\psi'(a)X + S'\tfrac{1}{2}\psi'(a')Y + S''\tfrac{1}{2}\psi'(a'')Z,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'(y) = S\tfrac{1}{2}\psi'(b)X + S'\tfrac{1}{2}\psi'(b')Y + S''\tfrac{1}{2}\psi'(b'')Z,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'(z) = S\tfrac{1}{2}\psi'(c)X + S'\tfrac{1}{2}\psi'(c')Y + S''\tfrac{1}{2}\psi'(c'')Z,$$

ce qui donne, d'après le n° 7 (α),

$$x\tfrac{1}{2}\varphi'(x) + y\tfrac{1}{2}\varphi'(y) + z\tfrac{1}{2}\varphi'(z) = (SX)X + (S'Y)Y + (S''Z)Z.$$

Si l'on applique ce résultat au cas où

$$a_{1,2} = a_{2,3} = a_{3,1} = 0,$$

on obtient sans calcul tous les théorèmes sur les diamètres conjugués d'une surface

$$a_{1,3}x^2 - a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 = \mathrm{K}.$$

III. — De la longueur des axes principaux.

Surfaces à centre. — La définition du centre donne, comme pour les coordonnées rectangulaires, pour ses coordonnées obliques A, B, C, les équations

$$\tfrac{1}{2}f'(\mathrm{A}) = 0, \quad \tfrac{1}{2}f'(\mathrm{B}) = 0, \quad \tfrac{1}{2}f'(\mathrm{C}) = 0.$$

Si l'on regarde A, B, C comme les coordonnées d'un point variable, ces trois équations représentent trois plans, qui se coupent : 1° en un seul point ; 2° suivant une droite ; 3° suivant un plan, et, dans les cas 1° et 2°, le point où la droite peut être à distance finie ou infinie. Si nous mettons ce dernier cas de côté, pour chaque sytème de solutions des équations

$$(1) \qquad a_{i,1}\mathrm{A} - a_{i,2}\mathrm{B} + a_{i,3}\mathrm{C} + a_{i,4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

l'expression

$$a_{4,1}\mathrm{A} + a_{4,2}\mathrm{B} + a_{4,3}\mathrm{C} + a_{4,4}$$

sera toujours égale à la *même* constante K : car, si $\mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 \mathrm{C}_1$ est un deuxième point vérifiant le système (1), il faut démontrer que l'on a

$$a_{1,4}\mathrm{A}_1 + a_{2,4}\mathrm{B}_1 + a_{3,4}\mathrm{C}_1 + a_{4,4} = \mathrm{K},$$

expression obtenue en ajoutant les équations (1), multipliées par $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$, à l'expression

$$a_{4,1}\mathrm{A} + a_{4,2}\mathrm{B} + a_{4,3}\mathrm{C} + a_{4,4} = \mathrm{K}.$$

On trouve facilement que, pour le premier cas, on a

$$\mathrm{K} = \Delta : \mathrm{A}_{4,4} \left(\Delta = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4}, \ \mathrm{A}_{ik} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial a_{i,k}} \right),$$

dans le deuxième cas

$$K = A_{1,1} : \Delta_{1,1} = A_{1,2} : \Delta_{1,2} = \ldots = A_{3,3} : \Delta_{3,3} \left(\Delta_{i,k} = \frac{\partial A_{4,4}}{\partial a_{i,k}} \right),$$

dans le troisième cas

$$K = (a_{l,4}\, a_{m,4} - a_{4,4}\, a_{l,m}) : a_{l,m} (l, m = 1, 2, 3).$$

Donc, si une surface

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta, \zeta) + 2a_{1,4}\xi + 2a_{2,4}\eta + \ldots + a_{4,4} = 0$$

a un centre à distance finie, le problème de la *longueur* des axes se trouve résolu par la transformation

$$\xi = x + A, \quad \eta = y + B, \quad \zeta = z + C.$$

Son équation en fonction des axes devient, d'après le § II,

$$SX^2 + S'Y^2 + S''Z^2 + K = 0.$$

Dans le cas des paraboloïdes, on définit le sommet α, β, γ par les équations

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2} f'(\alpha) = \rho \tfrac{1}{2} \psi'(a), \\ \tfrac{1}{2} f'(\beta) = \rho \tfrac{1}{2} \psi'(b), \\ \tfrac{1}{2} f'(\gamma) = \rho \tfrac{1}{2} \psi'(c), \\ a_{4,1}\alpha + a_{4,2}\beta + a_{4,3}\gamma + a_{4,4} = -\rho d, \\ \tfrac{1}{2}\psi'(a)\alpha + \tfrac{1}{2}\psi'(b)\beta + \tfrac{1}{2}\psi'(c)\gamma - d = 0, \end{gathered}$$

a, b, c étant les coordonnées de la direction des axes pour $S = 0$. Une analyse plus profonde montre que

$$\rho^2 = (a_{1,4}a + a_{2,4}b + a_{3,4}c)^2 = -A : (\Delta_{1,1} + \ldots) = -A : \delta A_{4,4},$$

si, pour une fonction χ des coefficients $a_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$, on pose

$$\delta\chi = \frac{\partial\chi}{\partial a_{1,1}} + \ldots + \frac{2\,\partial\chi}{\partial a_{1,2}} \cos(x, y) + \ldots$$

On obtient de plus

$$\rho a = -A_{1,4} : \delta A_{4,4}, \quad \rho b = -A_{2,4} : \delta A_{4,4} \ldots, \quad \rho c = -A_{3,4} : \delta A_{4,4},$$

$$\rho d = \frac{1}{2}\left(\frac{A\,\delta^2 A_{4,4}}{2} - \delta A\,\delta A_{4,4}\right) : \delta A_{4,4} \quad (^1).$$

Si l'on admet que, pour les racines S, S′, S″, l'équation est

$$\Delta_0 - \Delta_1 S + \Delta_2 S^2 - \Delta_3 S^3 = 0,$$

on obtient, pour équation du plan tangent au sommet,

$$A_{1,4}\tfrac{1}{2}\psi'(x) + A_{2,4}\tfrac{1}{2}\psi'(y) + A_{3,4}\tfrac{1}{2}\psi'(z) + \tfrac{1}{2}(A\,\Delta_2 - \delta A\,\Delta_1) : \Delta_1 = 0.$$

Pour α, β, γ même, on obtient $(i = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta A_{1,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(\delta A\,\Delta_1 + A\,\Delta_2)\Delta_{i,1}A_{4,i}^{-1}(\Delta_1)^{-2},\\
\beta &= \delta A_{2,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(\delta A\,\Delta_1 + A\,\Delta_2)\Delta_{i,2}A_{4,i}^{-1}(\Delta_1)^{-2},\\
\gamma &= \delta A_{3,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(\delta A\,\Delta_1 + A\,\Delta_2)\Delta_{i,3}A_{4,i}^{-1}(\Delta_1)^{-2},
\end{aligned}$$

ou, sous une forme symétrique,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta A_{1,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(A\,\Delta_2 + \delta A\,\Delta_1)A^{-1}\Delta_1^{-2}A_{1,4},\\
\beta &= \delta A_{2,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(A\,\Delta_2 + \delta A\,\Delta_1)A^{-1}\Delta_1^{-2}A_{2,4},\\
\gamma &= \delta A_{3,4}\Delta_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(A\,\Delta_2 + \delta A\,\Delta_1)A^{-1}\Delta_1^{-2}A_{3,4}.
\end{aligned}$$

Par la transformation

$$x = \xi - \alpha, \quad y = \eta - \beta, \quad z = \zeta - \gamma$$

l'équation

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

devient

$$\varphi(x, y, z) + 2\rho(ax + by + cz) = 0$$

ou, en vertu des formules du § II,

$$S''Y^2 + S''Z^2 + 2\rho X = 0.$$

Dans le cas où $S = S' = 0$, en introduisant les ex-

---

(1) L'équation en S est évidemment, d'après le théorème de Taylor,

$$A_{4,4} - S\,\delta A_{4,4} + \frac{S^2\delta^2 A_{4,4}}{2} - S^3(\Sigma \pm c_{1,1}, c_{2,2}, c_{3,3}) = 0.$$

pressions

$$\Phi(u, v, w) = \Delta_{1,1} u^2 + 2\Delta_{1,2} uv + \ldots,$$

$$\sigma^2 = (a_{1,4} a'' + a_{2,4} b'' + a_{3,4} c'')^2$$
$$= \delta[\Phi(a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})] : \Delta_2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_{1,1}} + \cdots\right) : \Delta_2.$$

on obtient, pour la fonction $f(\xi, \eta, \zeta)$,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = S'' Z^2 + 2\sigma Y,$$

où

$$Z = \frac{1}{2}\psi'(x)a'' + \frac{1}{2}\psi'(y)b'' + \frac{1}{2}\psi'(z)c'' + \frac{a_{14}a'' + \ldots}{S},$$

$$2\sigma Y = \frac{\partial\Phi}{\partial a_{1,4}}\psi'(x) + \frac{\partial\Phi}{\partial a_{2,4}}\psi'(y) + \frac{\partial\Phi}{\partial a_{3,4}}\psi'(z)$$
$$+ a_{4,4} - \Delta_2^{-1} \Sigma_{k=1}^{k=3} \Sigma_{\lambda=1}^{\lambda=3} C_{k,\lambda} \alpha_{4,k} a_{4,\lambda} + \sigma^2 \Delta_3 \Delta_2^{-1}.$$

IV. — De la direction des axes dans la section conique donnée.

$$\varphi(x, y, z) + K = 0, \quad X = \tfrac{1}{2}\psi'(a)x + \tfrac{1}{2}\psi'(b)y + \tfrac{1}{2}\psi'(c)z = 0.$$

Comme pour des coordonnées rectangulaires, on trouve

$$\varphi(x, y, z) = \lambda' Y^2 + \lambda'' Z^2 - 2\mu' XY - 2\mu'' XZ + \varphi(a, b, c)X^2,$$

où

$$Y = \tfrac{1}{2}\psi'(a')x + \tfrac{1}{2}\psi'(b)y + \tfrac{1}{2}\psi'(c')z,$$
$$Z = \tfrac{1}{2}\psi'(a'')x + \tfrac{1}{2}\psi'(b'')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c'')z,$$

et de plus

$$(a_{i,1} - \lambda' c_{i1})a' + (a_{i,2} - \lambda' c_{i,2})b' + (a_{i,3} - \lambda' c_{i,3})c' + \mu' \tfrac{1}{2}\psi'(a) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\psi'(a)a' + \tfrac{1}{2}\psi'(b)b' + \tfrac{1}{2}\psi'(c)c' + \mu'.0 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi'(a)x + \tfrac{1}{2}\varphi'(b)y + \tfrac{1}{2}\varphi'(c)z = \varphi(a, b, c)X - \mu' Y - \mu'' Z,$$

. . . .

V. — De la longueur des axes de la section de $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$, $\frac{1}{2}\psi'(a)\xi + \frac{1}{2}\psi'(b)\eta + \frac{1}{2}\psi'(c)\zeta + d = 0$.

La définition d'un centre A, B, C nous donne

$$(1)\qquad \frac{\frac{1}{2}f'(A)}{\frac{1}{2}\psi'(a)} = \frac{\frac{1}{2}f'(B)}{\frac{1}{2}\psi'(b)} = \frac{\frac{1}{2}f'(C)}{\frac{1}{2}\psi'(c)} (= -\mu),$$

$$(2)\qquad \tfrac{1}{2}\psi'(a)A + \tfrac{1}{2}\psi'(b)B + \tfrac{1}{2}\psi'(c)C + d = 0.$$

Les équations (1) représentent une droite qui, avec le plan (2), définissent : 1° un seul point, 2° tous les points de la droite, et cela : (a) à distance finie, (b) à l'infini [1].

Dans le cas (a), on démontre facilement qu'en introduisant un système (x, y, z) par les formules

$$\xi = x + A,\quad \eta = y + B,\quad \zeta = z + C,$$

$f(\xi, \eta, \zeta)$ devient

$$\varphi(x, y, z) - 2\mu X + K,$$

K ayant toujours la même valeur.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} F &= A_{11}\left[\tfrac{1}{2}\psi'(a)\right]^2 + 2A_{12}\tfrac{1}{2}\psi'(a)\tfrac{1}{2}\psi'(b) \\ &\quad + \ldots + 2A_{14}\tfrac{1}{2}\psi'(a)d + \ldots + A_{44}d^2, \end{aligned}$$

$$D_0 = -\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \frac{1}{2}\psi'a \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2}\psi'a & \ldots & 0 \end{vmatrix},\qquad \begin{aligned} F_{ik} &= \frac{\partial F}{\partial a_{i,k}}, \\ D_{ik} &= \frac{\partial D_0}{\partial a_{i,k}}, \\ D_1 &= \delta D_0, \\ 2D_2 &= \delta^2 D_0, \end{aligned}$$

---

[1] Le critérium résulte des déterminants connus, comme au § III.

on obtient, pour le cas (1^a),

$$K = (F : D_0),$$

pour le cas (2^a),

$$K = (F_{ik} : D_{ik}) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Dans le cas (1^b) de la parabole, on définit un point α, β, γ de la section par la condition que sa tangente soit perpendiculaire à la direction a', b', c', qui appartient à la racine $\lambda' = 0$.

Si l'on pose

$$f_i = a_{i1}\alpha + a_{i2}\beta + a_{i3}\gamma + a_{i4} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

on trouve, par l'introduction des signes,

$$\begin{aligned}
\rho &= a_{14}a + a_{24}b + a_{34}c,\\
\sigma^2 &= (a_{14}a' + a_{24}b' + a_{34}c')^2 = -(F : \delta D_0),\\
f_1 &= \rho\,\tfrac{1}{2}\psi'(a) + \sigma\,\tfrac{1}{2}\psi'(a'),\\
f_2 &= \rho\,\tfrac{1}{2}\psi'(b) + \sigma\,\tfrac{1}{2}\psi'(b'),\\
f_3 &= \rho\,\tfrac{1}{2}\psi'(c) + \sigma\,\tfrac{1}{2}\psi'(c'),\\
f_4 &= \rho d + \sigma\delta,\\
&\tfrac{1}{2}\psi'(a)\alpha + \tfrac{1}{2}\psi'(b)\beta + \tfrac{1}{2}\psi'(c)\gamma + d = 0,\\
&\tfrac{1}{2}\psi'(a')\alpha + \tfrac{1}{2}\psi'(b')\beta + \tfrac{1}{2}\psi'(c')\gamma + \delta = 0,
\end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta F_{14} D_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(FD_2 + \delta F D_1)F^{-1}D_1^{-2}F_{14},\\
\beta &= \delta F_{24} D_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(FD_2 + \delta F D_1)F^{-1}D_1^{-2}F_{24},\\
\gamma &= \delta F_{34} D_1^{-1} - \tfrac{1}{2}(FD_2 + \delta F D_1)F^{-1}D_1^{-2}F_{34}.
\end{aligned}$$

Par les substitutions

$$\begin{aligned}
x &= \xi + \alpha,\\
y &= \eta + \beta,\\
z &= \zeta + \gamma,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
f(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(x, y, z) &+ 2\rho X\\
&+ 2\sigma\left[\tfrac{1}{2}\psi'(a')x + \tfrac{1}{2}\psi'(b')y + \tfrac{1}{2}\psi'(c')z\right],
\end{aligned}$$

ce qui donne, pour $X = 0$, l'équation de la section

$$\lambda'' Z^2 + 2\sigma Y = 0, \quad Y = \tfrac{1}{2}\psi'(a')X + \tfrac{1}{2}\psi'(b')y + \tfrac{1}{2}\psi(c')z,$$

et l'équation $Y = 0$, en coordonnées ξ, η, ζ, est

$$F_{14}\tfrac{1}{2}\psi'(x) + \ldots + \tfrac{1}{2}(FD_2 - \partial FD_1) : D_1 = 0.$$

Dans le cas (2^b), on a

$$\lambda' = \lambda'' = 0,$$

et le système des formules s'obtient parce que, d'après le § IV, on a alors

$$\begin{aligned}\varphi(\xi, \eta, \zeta) = -[\xi\varphi'(a) + \eta\varphi'(b) + \zeta\varphi'(c)](X - d) \\ + \varphi(a, b, c)(X - d)^2.\end{aligned}$$

J'ai étendu tous ces développements au cas de coordonnées tétraédriques quelconques. Les méthodes précédentes (*voir* Hesse, Salmon) sont toujours en défaut, quand la surface est un cône ou un système de deux plans; elles ne donnent de résultats que lorsqu'on regarde la surface comme l'enveloppe de plans : donc, dans le cas d'une variété, pour les sections coniques dans l'espace et pour des paires de points. Si l'on traite les surfaces du second ordre d'une manière générale, en les regardant comme formées de séries de points, on doit évidemment donner la définition suivante des plans principaux :

Un plan P dans l'espace a, par rapport au cercle sphérique imaginaire, un pôle déterminé. Quand le plan polaire de ce pôle se confond avec P, P est un plan principal.

Je démontrerai ailleurs comment toutes les formules découlent de là. Comme, en ce moment, je n'ai pas le loisir nécessaire pour les publier, je vous serais infiniment obligé de recevoir quelques-uns des résultats ci-joints (surtout aux § III et V) comme *exercices*, dans vos excellentes *Annales*.

Darmstadt, 22 juin 1882.