P. ISSOLY

Sur les diverses courbures des lignes qu'on peut tracer sur une surface

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 522-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__522_1>

SUR LES DIVERSES COURBURES DES LIGNES QU'ON PEUT TRACER SUR UNE SURFACE;

PAR LE R. P. ISSOLY, à Uclès (Espagne).

I.

1° Étant donnés sur une surface F un point M et une courbe quelconque S issue de ce point, on sait que les tangentes consécutives MT et M'T' aux points infiniment voisins M et M' de la courbe forment un angle dont le rapport à l'arc MM' ou ds mesure la première courbure $\frac{1}{r}$ de la ligne S au point M.

Les composantes orthogonales, tangentielle et normale, $\frac{1}{r'}$ et $\frac{1}{r''}$ de cette courbure, c'est-à-dire les projections de $\frac{1}{r}$ sur le plan tangent en M et le plan normal à la surface conduit suivant ds, donnent la relation

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2}.$$

2° Considérons les tangentes MH, M'H' menées en M et M' aux trajectoires orthogonales de la ligne S, situées comme elle sur la surface F; le rapport de leur angle à l'arc ds mesure une nouvelle courbure que l'on peut désigner du nom de *déviation tangentielle* ou *horizontale* de la ligne S au point M. Or il est facile de prouver que cette déviation est la résultante de deux composantes orthogonales, savoir : 1° la torsion géodésique; 2° la première courbure géodésique de cette dernière ligne, de telle sorte qu'on peut écrire

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{r'^2}. \tag{2}$$

3° Substituons aux deux tangentes MH et M'H' les deux normales MN et M'N' à la surface; on formera avec elles la courbure que M. Bertrand a analysée le premier avec tant de succès, courbure encore innommée, croyons-nous, et que l'analogie des propriétés nous mène à qualifier de *déviation normale* ou *verticale* des lignes Σ. Elle admet en effet, elle aussi, des composantes orthogonales qui sont la torsion et la courbure normale Σ, d'où l'on conclut la formule

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{r''^2}. \tag{3}$$

4° En projetant la déviation normale sur deux directions rectangulaires quelconques ML_1 et ML_2 situées dans le plan tangent, on obtiendra les *composantes générales* de cette courbure. Ces composantes jouissent de propriétés nombreuses et variées qui, dans deux cas particuliers, les rattachent aux lignes asymptotiques et aux lignes de courbure de la surface. Pour ne citer qu'une de leurs propriétés générales, je dirai qu'elles ne sont autres, à un facteur constant près, que les inverses de la distance au plan tangent des traces que produit la normale M'N' sur les plans normaux NML_1 et NML_2.

5° Pour simplifier le langage, convenons de désigner, comme en Géométrie descriptive, par *plan de front* et *plan de profil* les plans normaux NMT et NMH menés respectivement par la tangente à la ligne S et à sa trajectoire orthogonale. Appelons aussi *plan de la déviation horizontale* le plan-limite de la variation du rayon de courbure géodésique $\frac{1}{r'}$; et *plan de la déviation normale* le plan-limite de la variation du rayon de courbure normale $\frac{1}{r''}$; nous pourrons énoncer le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *En tout point d'une courbe quelconque tracée sur une surface : 1° le plan tangent à la surface et le plan osculateur de la courbe; 2° le plan de front et le plan de la déviation horizontale; 3° le plan de profil et le plan de la déviation verticale forment entre eux trois angles tels que si, dans chaque couple, on prend l'angle aigu correspondant, le produit de leurs tangentes trigonométriques est toujours égal à l'unité.*

Telle est la généralité de cette propriété que les lignes géodésiques, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure caractérisées respectivement par les conditions $\frac{1}{r'} = 0$, $\frac{1}{r''} = 0$, $\frac{1}{g} = 0$, ne la font tomber en défaut que d'une manière apparente.

6° La considération des déviations tangentielle et normale $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ fournit la démonstration la plus simple et la plus naturelle du célèbre théorème de Dupin sur les surfaces orthogonales.

7° La déviation tangentielle fournit une quatrième équation élémentaire fondamentale s'ajoutant aux trois déjà connues (voir *Calcul différentiel* de M. SERRET, 2e édition, p. 489), et l'on a le système complet

$$(1)\qquad d\tau - d\varphi + \sin\omega\, d\varepsilon = 0,$$

$$(2)\qquad d\eta - d\omega + \sin\varphi\, d\sigma = 0,$$

$$(3)\qquad \cos\omega\, d\varepsilon + \cos\varphi\, d\sigma = 0,$$

$$(4)\qquad \sin\psi\, d\upsilon - \sin\varphi\, d\sigma = 0.$$

Dans ces formules, qui supposent essentiellement que le trièdre trirectangle NMTH a ses arêtes disposées dans le sens direct, et qu'on a choisi pour ψ et ω les angles aigus que les rayons des déviations tangentielle et normale font respectivement avec la normale MN et la tangente MT, les différentielles $d\sigma$, $d\upsilon$, $d\varepsilon$ et $d\eta$ représentent les angles de contingence de la première courbure, de la déviation tangentielle, de la déviation normale et de la courbure conjuguée de la ligne S, enfin φ représente l'angle de son plan osculateur avec la normale.

Comme la première de ces formules peut être remplacée par celle-ci :

$$(1')\qquad d\tau - d\varphi - \cos\psi\, d\upsilon = 0;$$

on en conclut la relation très simple

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\omega,$$

qui, légèrement transformée, fournit le théorème ci-dessus énoncé.

II.

1° Revenons aux deux normales infiniment voisines MN et M'N'; on sait que si l'on donne à l'arc ds toutes les directions possibles autour du point M, et que, par l'extrémité libre de cet arc, on mène les normales correspondantes de la surface, la perpendiculaire commune à ces normales produit une surface conoïdale qui, rapportée au plan tangent en M et aux plans des sections principales, a pour équation

$$(1) \qquad z = \frac{R''_2 x^2 + R''_1 y^2}{x^2 + y^2},$$

R''_1 et R''_2 représentant les longueurs des rayons principaux au point M.

2° D'autre part, le lieu géométrique des extrémités des rayons de courbure de toutes les sections *normales ou obliques* que l'on peut faire à la surface F tout autour du point M a pour équation, dans le même système d'axes coordonnés,

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{R''_1 R''_2 (x^2 + y^2) z}{R''_2 x^2 + R''_1 y^2} = 0;$$

et l'on vérifie aisément que, conformément au théorème de Meunier, les sections normales faites dans cette surface *osculatrice* sont bien des cercles.

3° Les surfaces (1) et (2) se coupent suivant une ligne gauche qui appartient à la sphère

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R''_1 R''_2,$$

et dont la projection sur le plan tangent a pour équation, en coordonnées polaires,

$$(4) \qquad \rho^2 = (R''_2 - R''_1)(R''_2 \cos^4\theta' - R''_1 \sin^4\theta').$$

4° Considérons les deux plans normaux rectangulaires NML_1 et NML_2 dont il a été question plus haut; soient K_1 et K_2 les points où ils sont rencontrés par la normale $M'N'$; menons par ces points, et dans chacun de ces plans, des parallèles I_1K_1, I_2K_2 au plan tangent, s'appuyant, en conséquence, sur la normale MN. Soit enfin i l'angle que le premier de ces plans fait avec le plan normal NMT; si l'on fait tourner les trois plans de telle manière que l'angle i reste constant, les parallèles tracées décriront deux surfaces conoïdales analogues à la précédente.

La première ayant pour équation

$$(5)\qquad \frac{x^2+y^2}{z} = \left(\frac{x^2}{R''_2} + \frac{y^2}{R''_1}\right) - xy\left(\frac{1}{R''_2} - \frac{1}{R''_1}\right)\cot i,$$

la seconde s'en déduira par le changement de i en $i - \frac{\pi}{2}$.

Que si l'on suppose maintenant i variable et suivant la loi

$$\tang i = -\frac{r''}{g},$$

on retombera sur le conoïde (1) de la perpendiculaire commune aux normales infiniment voisines de MN.

5° Comme l'a remarqué M. Bertrand, le lieu des projections du point K, extrémité de la plus courte distance IK des normales MN et M'N', quand la seconde tourne autour de la première, est

$$(6)\qquad d\lambda = \frac{(R''_1 - R''_2)\sin\theta''\cos\theta''}{\sqrt{R''^2_1\sin^2\theta'' + R''_1\cos^2\theta''}}\,ds.$$

Par analogie, le lieu des projections du point K_1, extrémité de la parallèle I_1K_1 au plan tangent menée dans le plan NML_1, a pour équation

$$(7)\quad d\lambda_1 = \frac{(R''_1 - R''_2)\sin(\theta_1 - i)\cos(\theta_1 - i)}{R''_1\cos\theta_1\sin(\theta_1 - i) - R''_2\sin\theta_1\cos(\theta_1 - i)}\,ds.$$

On en déduira le lieu des projections du point K_2, extrémité de la parallèle I_2K_2, en remplaçant i par $i - \frac{\pi}{2}$.

Enfin, de l'une ou de l'autre de ces courbes on peut tirer, comme cas particulier, la courbe (6); il suffit, pour cela, de se rappeler que, sur le plan tangent, la projection de IK est la direction conjuguée de MT relativement à l'indicatrice de la surface F au point M.