Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 475-482

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__475_1>

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Ph. Gilbert, Professeur à l'Université de Louvain.

Je vais, si vous le permettez, continuer avec M. le Dr Peano l'examen d'un point important d'Analyse.

Mes observations (même tome, p. 153) n'avaient pas « pour but de rien ajouter à la rigueur de la démonstra-

(1) Netto, *Substitutionentheorie*, p. 72, *Lehrsatz VI*.

tion de M. Jordan », mais de prouver que l'objection de M. Peano contre cette démonstration ne suffisait pas, et de préciser le point défectueux de la démonstration.

L'objection était (même tome, p. 46) que, « si $f'(a_{r-1})$ est la limite de $\frac{f(a_r)-f(a_{r-1})}{a_r-a_{r-1}}$ quand on suppose a_{r-1} fixe et a_r s'approchant indéfiniment de a_{r-1}, on ne peut l'affirmer (en général) quand a_r et a_{r-1} varient en même temps : ce qui se vérifie sur l'exemple

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$$

avec

$$a_1 = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad a_2 = \frac{1}{2n\pi}.$$

Cette objection tombe, comme je l'ai fait remarquer (même tome, p. 153), si l'on fait décroître les intervalles δ par l'intercalation successive de nouvelles valeurs *fixes* de x, comme cela est permis, et comme on le peut notamment dans l'exemple allégué [1].

Le vice de la démonstration de M. Jordan (et d'autres antérieures) n'est donc pas là. Il consiste, comme je l'ai dit (p. 154), en ce que, « lorsqu'on fait tendre simultanément vers zéro tous les intervalles δ », par l'intercalation successive de nouvelles valeurs de x, on peut supposer que la différence

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} - f'(x)$$

---

[1] « Dans mon exemple, dit M. Peano, on peut les supposer fixes et le raisonnement subsistera toujours, si les deux premières conservent la forme $\frac{1}{(2n+1)\pi}$, $\frac{1}{2n\pi}$. » Sans vouloir chicaner sur un point sans importance, je ferai remarquer que l'intervalle $a_2 - a_1$ entre ces deux valeurs consécutives ne peut décroître au-dessous de tout nombre donné, *ce que suppose essentiellement M. Jordan,* à moins que n ne devienne infini, c'est-à-dire que a_1 et a_2 tendent simultanément vers zéro.

reste toujours supérieure à une limite fixe pour un nombre fini ou indéfiniment croissant de valeurs de x, précisément parce qu'on en introduit toujours de nouvelles. C'est la « difficulté plus subtile » dont je parlais, et dont parlait sans doute M. Jordan en disant que sa démonstration suppose que le rapport des accroissements tende *uniformément* vers $f'(x)$.

Pour ce qui regarde la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

j'avoue avoir mal interprété ces termes de M. Peano : « qu'on la démontre très facilement *sans supposer la continuité de la dérivée* ». J'ai compris par là qu'il l'étendait à toutes les discontinuités possibles de la dérivée, tandis qu'il la suppose, pour chaque valeur de x, *finie, déterminée* et *égale dans les deux sens,* ce qui ramène au théorème fort connu de M. O. Bonnet, et restreint notablement la portée de la formule. C'est pour ce motif que je lui ai opposé un des genres de discontinuité qui se présentent le plus souvent dans la dérivée, et pour lequel l'équation ci-dessus ne peut s'appliquer, tandis que le théorème énoncé par M. Jordan subsiste. Je suis donc porté à croire ce dernier théorème plus général, et il serait à désirer qu'on l'établît rigoureusement dans toute sa généralité.

A cet égard, la proposition que M. Peano donne à démontrer ne peut être d'aucune utilité, parce qu'elle suppose précisément cette restriction que la dérivée $f'(x)$ soit *finie* et *unique* pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b), restriction que je voudrais écarter s'il se peut. En effet, M. Peano n'ignore pas que du moment où la dérivée $f'(x)$ a une valeur *unique* en chaque point, fût-elle même infinie en certains points, on démontre rigoureusement , *sans faire usage de la propo-*

sition qu'il énonce, que le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est compris entre la plus petite et la plus grande valeur de $f'(x)$ dans l'intervalle (a, b) (théorème de M. Jordan), et que cette propriété subsiste même pour certains cas où la fonction $f(x)$ elle-même est discontinue. La proposition en question ne peut donc servir à rien pour mon but, c'est pourquoi je n'ai pas beaucoup cherché à perfectionner la démonstration que je donne ci-dessous; mais, comme le théorème offre par lui-même quelque intérêt, j'espère que M. Peano voudra publier sa démonstration, qui sera sans doute meilleure.

Si $f(x)$ a une dérivée finie et déterminée (¹) *pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle fini (a, b), et si l'on fixe une quantité ε aussi petite qu'on le veut, il est toujours possible de diviser l'intervalle (a, b) en un nombre fini de valeurs de x :*

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ b,$$

de façon que chacune des différences

$$\frac{f(a_{r+1})-f(a_r)}{a_{r+1}-a_r}-f'(a_r) \quad (r=0,1,2,\ldots,n-1)$$

soit, en valeur absolue, moindre que ε.

Supposons $a < b$. D'après l'hypothèse, il est toujours possible de trouver une quantité déterminée et positive δ_1, telle que l'on ait en valeur absolue

$$\frac{f(a+\theta\delta_1)-f(a)}{\theta\delta_1}-f'(a) < \varepsilon,$$

θ désignant, *en général,* une quantité arbitraire > 0, et

(¹) La même dans les deux sens.

égale ou inférieure à l'unité. Prenons δ_1 le plus grand possible, et faisons $a + \delta_1 = a_1$. On pourra, de même, trouver une suite de quantités déterminées $\delta_2, \delta_3, \ldots$ telles que l'on ait toujours

$$\text{val. abs.}\left[\frac{f(a_1+\theta\delta_2)-f(a_1)}{\theta\delta_2}-f'(a_1)\right]<\varepsilon,\quad a_1+\delta_2=a_2;$$

$$\text{val. abs.}\left[\frac{f(a_2+\theta\delta_3)-f(a_2)}{\theta\delta_3}-f'(a_2)\right]<\varepsilon,\quad a_2+\delta_3=a_3,$$

et, en général,

$$(1)\qquad \text{val. abs.}\left[\frac{f(a_r+\theta\delta_{r+1})-f(a_r)}{\theta\delta_{r+1}}-f'(a_r)\right]<\varepsilon.$$

Les quantités $a, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$ formant une suite toujours croissante, deux hypothèses seulement sont possibles : 1° ou bien les intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ ne deviendront jamais plus petits qu'une quantité fixe δ, et dans ce cas, pour une valeur finie $n-1$ du nombre r, on aura

$$a_{n-1}<b,\quad a_{n-1}+\delta_n \overline{\gtrless} b,$$

d'où, attribuant à θ une valeur convenable égale ou inférieure à 1, $a_{n-1}+\theta\delta_n = b$. Dans ce cas, en vertu de la relation (1), les quantités

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ b$$

seront des valeurs de x qui satisferont à la condition demandée.

2° Ou bien les valeurs successives $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$, tout en croissant constamment, ne pourront atteindre la valeur b, ce qui exige que les intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r, \ldots$ finissent par devenir moindres que toute grandeur donnée. Alors les quantités croissantes $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$ convergeront vers une limite fixe c, inférieure, ou tout au plus égale à b, de sorte que, entre $c-\sigma$ et c, quelque petite que soit la quantité positive σ, il existera une infinité de ces quantités, a_p, a_{p+1}, ..., ou une infinité d'intervalles δ compris dans l'intervalle $(c - \sigma, c)$.

Mais, puisque c est compris entre a et b, la dérivée a pour $x = c$ une valeur unique et déterminée $f'(c)$. Il est donc toujours possible d'assigner un intervalle fini σ tel que l'on ait (θ ayant toujours la même signification que ci-dessus)

$$\text{val. abs.}\left[\frac{f(c - \theta\sigma) - f(c)}{-\theta\sigma} - f'(c)\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

ou, ce qui revient au même, en désignant par η une quantité qui dépend de θ, mais qui reste comprise entre -1 et $+1$,

$$(2) \qquad \frac{f(c) - f(c - \theta\sigma)}{\theta\sigma} = f'(c) + \eta\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, d'après les hypothèses faites sur $f(x)$ et le théorème de M. Bonnet, on a

$$(3) \qquad \frac{f(c) - f(c - \theta\sigma)}{\theta\sigma} = f'(\xi),$$

ξ désignant une certaine valeur de x, telle que

$$c - \theta\sigma < \xi < c;$$

donc, si l'on combine les équations (2) et (3), on aura

$$(4) \qquad f'(\xi) = f'(c) + \eta\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi il existe nécessairement, dans l'intervalle $(c - \sigma, c)$ défini ci-dessus, au moins une valeur ξ de x, telle que la dérivée $f'(\xi)$ diffère de $f'(c)$ d'une quantité moindre, en valeur absolue, que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Or, d'après une remarque faite plus haut, cette valeur ξ, ou coïncidera avec une des quantités a_p, a_{p+1}, ..., ou sera comprise entre deux d'entre elles, a_r et a_{r+1};

elle pourra donc se représenter par $a_r + \theta\delta_{r+1}$, en sorte qu'on aura, dans tous les cas, d'après (1),

$$(5) \qquad \text{val. abs.}\left[\frac{f(\xi)-f(a_r)}{\xi-a_r} - f'(a_r)\right] < \varepsilon.$$

Appliquons maintenant à cette valeur ξ de x la relation (2), en faisant, dans celle-ci, $c - \theta\sigma = \xi$; nous aurons

$$\frac{f(c)-f(\xi)}{c-\xi} = f'(c) + \eta'\frac{\varepsilon}{2},$$

η' étant compris entre -1 et $+1$. De là, en vertu de l'équation (4),

$$\frac{f(c)-f(\xi)}{c-\xi} = f'(\xi) + (\eta'-\eta)\frac{\varepsilon}{2},$$

où, $\eta'-\eta$ étant plus petit que 2,

$$(6) \qquad \text{val. abs.}\left[\frac{f(c)-f(\xi)}{c-\xi} - f'(\xi)\right] < \varepsilon.$$

Les inégalités (1), (5), (6) montrent que l'on peut passer *effectivement* de la valeur a à la valeur c par un nombre *fini* de valeurs de x

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r,\ \xi,\ c,$$

telles que deux valeurs consécutives x' et x'' vérifient toujours la relation

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} - f'(x') < \varepsilon$$

en valeur absolue.

En raisonnant sur l'intervalle (c, b) comme on a raisonné sur l'intervalle (a, b), on finira par établir qu'on peut toujours passer de a à b par un nombre fini d'intervalles δ, qui satisfont à la condition formulée dans l'énoncé du théorème.

On voit facilement quel changement subirait la démonstration si l'on avait $c = b$.