Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 45-49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__45_1>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. le Dr J. Peano. — Dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* p. 21, M. Jordan donne une démonstration peu rigoureuse du théorème suivant :

« Soit $y = f(x)$ une fonction de x dont la dérivée reste finie et déterminée lorsque x varie dans un certain intervalle.

» Soient a et $a + h$ deux valeurs de x prises dans cet intervalle. On aura

$$f(a + h) - f(a) = \mu h,$$

μ désignant une quantité intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur de $f'(x)$ dans l'intervalle de a à $a+h$. »

En effet, dit l'auteur, donnons à x une série de valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ intermédiaires entre a et $a+h$; posons

$$f(a_r) - f(a_{r-1}) = (a_r - a_{r-1})[f'(a_{r-1}) + \varepsilon_r].$$

Supposons maintenant les valeurs intermédiaires $a_1, \ldots, a_{n-1}$ indéfiniment multipliées (et rapprochées). Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tendront toutes vers zéro, car ε_r est la différence entre $\frac{f(a_r) - f(a_{r-1})}{a_r - a_{r-1}}$ et sa limite $f'(a_{r-1})$.

Cette affirmation n'est pas juste; car

$$f'(a_{r-1}) = \lim \frac{f(a_r) - f(a_{r-1})}{a_r - a_{r-1}}$$

quand on suppose a_{r-1} fixe, et a_r variable et s'approchant indéfiniment de a_{r-1}; mais on ne le peut pas affirmer quand varient en même temps a_r et a_{r-1}, si l'on ne suppose pas que la dérivée soit continue.

Ainsi, par exemple, posons

$$y = f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},$$

avec

$$f(0) = 0;$$

sa dérivée

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

pour $x \gtrless 0$, et $f'(0) = 0$, reste toujours finie et déterminée, mais discontinue.

Soit

$$a = 0, \quad h > 0;$$

posons

$$a_1 = \frac{1}{2n\pi}, \quad a_2 = \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

$a_3, a_4, \ldots$ quelconques.

On aura

$$\varepsilon_2 = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} - f'(a_1);$$

mais

$$f(a_1) = 0, \quad f(a_2) = 0, \quad f'(a_1) = -1;$$

donc

$$\varepsilon_2 = 1,$$

et sa limite n'est pas zéro.

Presque la même faute a été commise par M. Hoüel (*Cours de Calcul infinitésimal*, t. I, p. 145). J'ajouterai enfin que l'on démontre très facilement la formule

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée.

Extrait d'une Lettre de M. C. Jordan. — Je n'ai rien à répondre à la critique de M. le Dr Peano, qui est parfaitement fondée. J'ai admis implicitement dans ma démonstration que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tendait *uniformément* vers $f'(x)$ dans l'intervalle de a à b. C'est un des points sur lesquels je me proposais d'ailleurs de revenir dans mon troisième Volume.

M. Peano dit qu'il est facile de démontrer la formule

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h),$$

sans supposer la continuité de la dérivée. Il me ferait plaisir en me communiquant sa démonstration, car je n'en connais pas qui me paraisse pleinement satisfaisante.

Extrait d'une Lettre de M. G. Kœnigs. — Il y a deux ans, lorsque je vous envoyai la Note sur les cubiques qui vient de paraître dans le numéro de juillet des *Annales*, je n'avais pas cherché si le complexe des tangentes aux cubiques gauches passant par cinq points était bien le seul qu'on pût définir par des points de départ, de telle sorte que le cône de Malus contînt cinq points fixes. En lisant l'article, j'ai tout de suite pensé à cette réciproque, et voici, en quelques mots, comment je l'établis. Une transformation homographique permet toujours de rejeter trois points fixes à l'infini suivant trois directions rectangulaires, Ox, Oy, Oz; de plus, je puis prendre pour origine O des coordonnées le milieu de la droite qui joint les deux autres points, qui ont ainsi pour coordonnées (a, b, c), $(-a, -b, -c)$.

En cherchant d'abord à définir les cosinus directeurs X, Y, Z d'une droite en fonction du point de départ (x, y, z), de sorte que le cône de Malus passe par les points fixes à l'infini, c'est-à-dire contienne les trois parallèles aux axes menées par son sommet, on trouve que l'on doit avoir

$$\frac{X}{f(x)} = \frac{Y}{\varphi(y)} = \frac{Z}{\psi(z)},$$

où f, φ et ψ sont des fonctions arbitraires.

Si l'on exprime ensuite que le cône contient les deux autres points (a, b, c), $(-a, -b, -c)$, on tombe sur deux autres équations qui déterminent *complètement* les fonctions f, φ, ψ, et l'on vérifie que les valeurs de X, Y, Z conviennent à la tangente au point (x, y, z) à la cubique gauche passant par ce point, ainsi que par les autres cinq points fixes.

Le complexe du sixième ordre que j'ai défini dans la Note précitée est donc le seul qui jouisse de la propriété que je lui avais reconnue directement.

Si l'on aborde la question sans prendre la précaution de rejeter trois des points à l'infini, on tombe sur un système de six équations linéaires entre trois fonctions de trois variables indépendantes, et il ne paraît pas aisé de découvrir que ce système surabondant comporte cependant une solution unique et dénuée de constantes arbitraires.

Extrait d'une Lettre de M. d'Ocagne. — Par application de la formule

$$\delta = \psi'(x)\rho \cos\alpha,$$

que j'ai donnée dans une Note récente (3e série, t. II, p. 190), on a ce théorème :

Soit donné un cercle rapporté à deux axes rectangulaires passant par son centre ; si sur la tangente en chaque point on porte une longueur égale à l'x de ce point, la normale à la courbe ainsi obtenue coupe le rayon du cercle à une distance du centre égale à l'y du point.