E. CESÀRO

Théorème de cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 434-436

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__434_1>

THÉORÈME DE CINÉMATIQUE;

PAR M. E. CESARO.

Lorsqu'un point M parcourt une trajectoire quelconque, on peut supposer, à chaque instant, qu'il exécute un mouvement hélicoïdal autour d'un *axe central,* qui est l'axe de l'hélice osculatrice à la trajectoire, au point considéré. On en déduit facilement que le mouvement d'un point peut toujours être ramené au roulement et au glissement d'une surface réglée, solidaire avec le point, sur une surface réglée fixe dans l'espace. *Dans quels cas ces surfaces sont-elles développables?*

On sait que l'axe central, parallèle à la rectifiante, rencontre la normale principale, entre le point M et le centre de courbure, à une distance de M égale à

$$\rho \sin^2\varphi - R.$$

φ étant l'angle de la rectifiante avec la tangente. Si A, B, C sont les cosinus directeurs de l'axe central, et f, g, h les cosinus directifs de la normale principale, les équations de l'axe central sont

$$\frac{X-(x+Rf)}{A} = \frac{Y-(y+Rg)}{B} = \frac{Z-(z+Rh)}{C},$$

et, par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que cet axe engendre une surface développable est exprimée par l'égalité

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} A & dA & dx + R\,df + f\,dR \\ B & dB & dy + R\,dg + g\,dR \\ C & dC & dz + R\,dh + h\,dR \end{vmatrix} = 0.$$

Or on sait que la normale principale est perpendiculaire à deux axes centraux consécutifs, et que ceux-ci font entre eux un angle $d\varphi$. Il en résulte

$$\frac{f}{B\,dC - C\,dB} = \frac{g}{C\,dA - A\,dC} = \frac{h}{A\,dB - B\,dA} = \frac{1}{d\varphi}.$$

La condition (1) devient donc

$$[\Sigma f\,dx + R\,\Sigma f\,df + dR\,\Sigma f^2]\,d\varphi = 0$$

ou bien

$$d\varphi\,dR = 0.$$

Conséquemment *il y a deux classes de trajectoires, telles que, si un point les parcourt, son mouvement revient au roulement et au glissement d'une surface développable, solidaire avec le point, sur une surface développable fixe dans l'espace.* La première classe, définie par la condition $\varphi =$ const., est connue : c'est la classe des *hélices,* ou lignes géodésiques des surfaces cylindriques. Il nous resterait à étudier la seconde classe de trajectoires, répondant à la condition $R =$ const., ou bien, ainsi qu'il est facile de le reconnaître, à la condition

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{r^2} = \text{const.}$$

Si l'on considère les surfaces rectifiantes des trajectoires de la dernière classe, on voit que le problème peut être posé en ces termes : *Quelles sont les surfaces développables, qui ont une courbure constante le long d'une de leurs géodésiques?*