NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 367-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__367_1>

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE EN COORDONNÉES POLAIRES;

PAR M. CH. BIEHLER.

I.

CONSTRUCTION DE LA COURBE AUTOUR DU POLE.

1. Nous supposerons que l'équation de la courbe est algébrique et entière par rapport à ρ, et que les coefficients des diverses puissances de ρ soient des fonctions de ω, auxquelles la formule de Taylor soit applicable. Nous prendrons l'équation de la courbe sous la forme

$$(1)\qquad 0 = \varphi(\omega) + \rho\,\varphi_1(\omega) + \rho^2\,\varphi_2(\omega) + \ldots + \rho^m\,\varphi_m(\omega),$$

et nous allons nous proposer de déterminer la forme de la courbe autour du pôle, puis autour de l'un quelconque de ses points.

Soit α une racine simple de l'équation

$$\varphi(\omega) = 0.$$

et supposons que α n'annule pas $\varphi_1(\omega)$. Une seule racine de l'équation (1) tendra vers zéro, quand ω tend vers α. Soit ρ_1 cette racine et $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_m$ les $m-1$ autres. On aura

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_m} = -\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)};$$

les racines $\rho_2, \ldots, \rho_m$ étant différentes de zéro quand ω est voisin de α, c'est le terme $\frac{1}{\rho_1}$ qui donne son signe au premier membre, et, par suite, le signe de ρ_1 est fourni par l'expression

$$-\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)},$$

quand ω est suffisamment voisin de α.

Posons

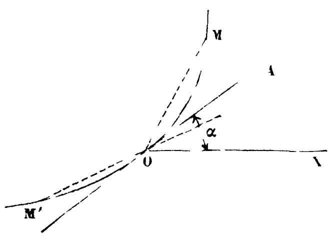
$$\omega = \alpha + \varepsilon;$$

le signe de $-\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)}$ sera celui de

$$-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varepsilon\varphi'(\alpha)}.$$

Cette expression fournit donc le signe de ρ_1 dans le voisinage du pôle et du rayon polaire mené à une distance angulaire suffisamment voisine de α. La racine ρ_1 en-

Fig. 1.



gendre une branche de courbe tangente au pôle à la droite $\omega = \alpha$. Cette branche est tout entière située d'un même côté de sa tangente, car ρ_1 change de signe avec ε.

On obtient une disposition semblable à celle de la *fig.* 1. Cette figure a été construite dans l'hypothèse où $-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varepsilon\varphi'(\alpha)}$ est positif.

2. Supposons maintenant

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi_1(\alpha) = 0,$$

avec

$$\varphi'(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi'_1(\alpha) \gtrless 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2(\alpha) \gtrless 0$$

Deux racines de l'équation (1) tendront vers zéro; soient ρ_1 et ρ_2 ces racines, nous aurons

$$(a) \qquad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\left[\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\right],$$

$$(b) \qquad \frac{1}{\rho_1 \times \rho_2} = \frac{\varphi_2(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\left[\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\right] - S_2,$$

en désignant par S_1 la somme $\frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} + \ldots + \frac{1}{\rho_m}$, et par S_2 la somme des produits deux à deux des mêmes quantités.

Les sommes S_1 et S_2 restent finies quand ω tend vers α. Des formules (a) et (b) on tire

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 \\ &\quad = \left[\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\right]^2 - \frac{4\varphi_2(\omega)}{\varphi(\omega)} - 4S_1\left[\frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi(\omega)} + S_1\right] + 4S_2. \end{aligned} \right.$$

Le seul terme du deuxième membre de la formule (c) qui devienne infini quand ω tend vers α est le terme

$$-\frac{4\varphi_2(\omega)}{\varphi(\omega)},$$

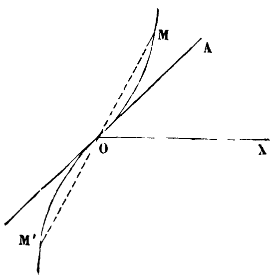
il donne son signe au deuxième membre et par suite à la fonction $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$. Or cette quantité a le signe de

$$-\frac{4\varphi_2(\alpha)}{\varepsilon\varphi'(\alpha)},$$

pour des valeurs de ε suffisamment petites. On voit donc que ε ne peut recevoir que des valeurs de signe contraire à $\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$, pour que ρ_1 et ρ_2 soient réels. Les racines ρ_1 et ρ_2 sont de signe contraire d'après la formule (a), et le signe de $\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ indique quel est le seul signe possible de l'accroissement ε.

Les racines ρ_1 et ρ_2 engendreront donc une branche de courbe analogue à celle de la *fig.* 2. Le pôle est pour la courbe un point d'inflexion.

Fig. 2.



3. Supposons actuellement que α soit racine double de l'équation $\varphi(\omega) = 0$, et soit $\varphi_1(\alpha) \gtrless 0$.

La somme des inverses des racines est

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_m} = - \frac{\varphi_1(\alpha + \varepsilon)}{\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(\alpha) + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\varphi'''(\alpha) + \ldots}.$$

Le signe du second membre est donné par

$$-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)},$$

et ce signe reste le même quand ε varie entre deux limites $-\varepsilon_1$ et $+\varepsilon_1$; par conséquent, la racine ρ_1, qui seule tend vers zéro, conserve le même signe pour des valeurs positives et négatives de ε suffisamment petites.

Le pôle est dans ce cas un point de rebroussement de première espèce, et la droite $\omega = \alpha$ est la tangente de rebroussement. Le signe de $-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ donne la position de la courbe par rapport au pôle; la *fig*. 3 a été construite dans l'hypothèse de

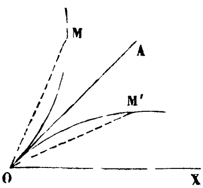
$$-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)} > 0.$$

Si l'on avait

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha) = 0, \quad \ldots,$$
$$\varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi_1(\alpha) \gtrless 0,$$

une seule racine de l'équation tendrait encore vers zéro,

Fig. 3.



quand ω tend vers α; le signe de cette racine est évidemment, d'après ce qui précède, celui de

$$-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi^{(p)}(\alpha)\varepsilon^p}.$$

Si donc p est pair, la courbe aura la forme de la *fig*. 3; si p est impair, la forme de la courbe sera analogue à celle de la *fig*. 1.

4. Étudions maintenant le cas où α est racine double de $\varphi(\omega) = 0$ et racine simple de $\varphi_1(\omega) = 0$, on aura

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha) = 0, \quad \varphi_1(\alpha) = 0,$$

avec

$$\varphi''(\alpha) \gtrless 0, \quad \varphi'_1(\alpha) \lessgtr 0.$$

et soit

$$\varphi_2(\alpha) \gtrless 0.$$

Deux racines de l'équation (1) tendent vers zéro quand ω tend vers α, et l'on peut écrire les formules

$$(a') \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = -\left[\frac{\varphi'_1(\alpha) + \frac{\varepsilon}{1.2}\varphi''_1(\alpha) + \ldots}{\frac{\varepsilon}{1.2}\varphi''(\alpha) + \ldots} + S_1\right],$$

$$(b') \quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 \times \rho_2} &= \frac{\varphi_2(\alpha) + \varepsilon\varphi'_2(\alpha) + \ldots}{\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''(\alpha) + \ldots} \\ &\quad + S_1\left[\frac{\varphi'_1(\alpha) + \ldots}{\frac{\varepsilon}{1.2}\varphi''(\alpha) + \ldots} + S_1\right] - S_2, \end{aligned}\right.$$

$$(c') \quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\frac{\varphi'^2_1(\alpha) - 2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha)}{\left[\frac{1}{1.2}\varphi''(\alpha)\right]^2} + \varepsilon\psi(\alpha) + \varepsilon^2\psi_1(\alpha, \varepsilon)\right\}; \end{aligned}\right.$$

le signe de la quantité $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$ est évidemment celui de

$$\varphi'^2_1(\alpha) - 2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha).$$

Si cette quantité est positive, ρ_1 et ρ_2 sont réels; si elle est négative, ρ_1 et ρ_2 sont imaginaires, et la tangente $\omega = \alpha$ est une tangente de rebroussement avec des branches imaginaires.

Supposons

$$\varphi'^2_1(\alpha) - 2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha) > 0;$$

ρ_1 et ρ_2 sont de même signe si $\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi''(\alpha)} > 0$, et de signe contraire si $\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi''(\alpha)} < 0$; c'est la somme $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$, ou plutôt la quantité $\frac{\varphi'_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$, qui donnera dans le premier cas le signe des racines.

On obtient une figure analogue à la *fig.* 4, quand les

Fig. 4.

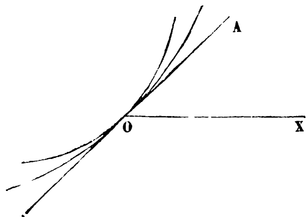
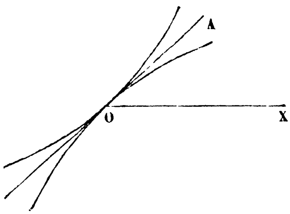


Fig. 5.



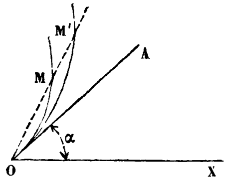
racines sont de même signe, et une figure analogue à la *fig.* 5, quand les racines sont de signe contraire.

Si $\varphi'_1(\alpha)^2 - 2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha) = 0$, la quantité $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$ prend la forme

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 = \frac{\psi(\alpha)}{\varepsilon} + \psi_1(\alpha, \varepsilon);$$

par suite, ρ_1 et ρ_2 ne sont plus réels, quel que soit ε; mais ils ne sont réels que quand ε est du signe de $\psi(\alpha)$. On peut voir aisément que, dans ce cas, ρ_1 et ρ_2 sont de même signe, car, $2\varphi_2(\alpha)\varphi''(\alpha)$ étant égal au carré $\varphi'^2_1(\alpha)$,

Fig. 6.



la formule (b') nous montre que, quel que soit le signe ε, le produit $\rho_1 \times \rho_2$ est positif. On obtient donc une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig.* 6.

La formule (a') indique quel est le signe des racines ρ_1 et ρ_2. Si $\frac{\varphi'_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ est positif, les racines sont de signe contraire à ε, et si $\frac{\varphi'_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ est négatif, les racines sont du signe de ε.

La *fig.* 6 a été construite dans l'hypothèse où la quantité $\frac{\varphi'_1(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}$ est négative et où $\psi(\alpha) > 0$.

5. Nous pouvons supposer maintenant qu'un nombre quelconque des dérivées des fonctions φ et φ_1 soient nulles pour $\omega = \alpha$. Si $\varphi_2(\alpha) \gtrless 0$, il n'y aura que deux racines qui tendront vers zéro.

Soient

$$\begin{array}{llll} \varphi\,(\alpha) = 0, & \varphi'(\alpha) = 0, & \ldots, \quad \varphi^{(N-1)}(\alpha) = 0, & \varphi^{(N)}(\alpha) \gtrless 0, \\ \varphi_1(\alpha) = 0, & \varphi'_1(\alpha) = 0, & \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(\alpha) = 0, & \varphi^{(n)}(\alpha) \gtrless 0, \end{array}$$

et supposons $N > n$. Dans ce cas, les expressions de $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ et de $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ seront de la forme

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{A - A'\varepsilon}{\varepsilon^{N-n}},$$

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{B + B'\varepsilon}{\varepsilon^N},$$

A et B étant indépendants de ε.

On en tire

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 = \frac{(A + A'\varepsilon)^2}{\varepsilon^{2N-2n}} - \frac{4(B + B'\varepsilon)}{\varepsilon^N}.$$

Si $2N - 2n$ est supérieur à N, c'est-à-dire $N > 2n$, c'est le terme $\frac{A^2}{\varepsilon^{2N-2n}}$ qui donnera son signe au second membre ; $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$ restera donc positif quand ε change de signe : les deux racines ρ_1 et ρ_2 sont toujours réelles ; leurs signes sont aisés à trouver.

Si N et n sont tous deux pairs, la somme et le produit des racines conservent leurs signes, qui sont ceux des quantités A et B.

Si B est positif, on obtient une disposition analogue à celle de la *fig.* 7; si B est négatif, on obtient une figure analogue à la *fig.* 5.

La *fig.* 7 a été construite dans l'hypothèse de $A > 0$.

Fig. 7.

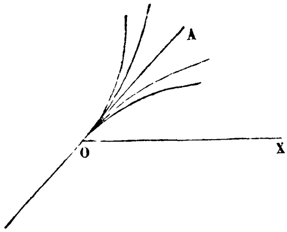
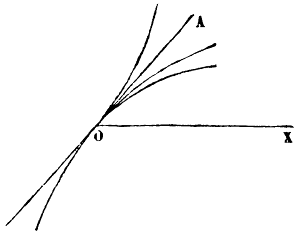


Fig. 8.



Si N et n étaient de parité différente, par exemple N pair et n impair, le produit des racines resterait toujours positif; mais les racines changeraient toutes deux de signe : on obtiendrait une figure analogue à la *fig.* 4.

Mais, si N est impair, les racines, d'un côté, sont de même signe, et de l'autre de signe contraire. On obtient alors une disposition analogue à celle de la *fig.* 8, construite dans l'hypothèse de $B < 0$ avec $A > 0$, quelle que soit d'ailleurs l'hypothèse faite sur n.

Si $N < 2n$, c'est le terme $-\frac{4B}{\varepsilon^N}$ qui donne son signe à la fonction $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$; enfin, si $N = 2n$, l'expression de $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2$ devient

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)^2 = \frac{A^2 - 4B + C\varepsilon}{\varepsilon^{2n}}.$$

La discussion de ces nouveaux cas se fait facilement : nous ne nous y arrêterons pas.

Nous n'avons envisagé jusqu'ici que l'hypothèse où deux racines au plus de l'équation (1) tendent vers zéro; nous n'examinerons pas le cas où un plus grand nombre de racines tendent vers zéro. Nous avons indiqué dans un article précédent : *Sur la construction d'une courbe algébrique autour d'un de ses points* (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. II), la marche à suivre dans ce cas.

On peut aussi, pour construire la courbe autour du pôle, chercher l'expression approchée des racines infiniment petites de l'équation (1), comme nous l'avons fait dans un autre travail : *Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques* (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX et XX). Cette méthode s'applique sans modification au cas actuel : nous ne nous y arrêterons pas et nous allons passer au cas où il s'agit d'étudier la courbe autour d'un point autre que le pôle.

(*A suivre.*)