C. MARGERIE

Quelques formules relatives à l'équation complète du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 32-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__32_1>

QUELQUES FORMULES RELATIVES A L'ÉQUATION COMPLÈTE DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. C. MARGERIE.

Soient l'équation

$$(1) \qquad a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0$$

et l'expression indicatrice

$$I = 4(a_1^2 - a_0 a_2)(a_2^2 - a_1 a_3) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2,$$

dont la loi de formation est facile à retenir.

α. Si $I > 0$, l'équation a ses trois racines réelles.

Si $I < 0$, l'équation n'a qu'une racine réelle.

Si $I = 0$, deux cas se présentent : 1° les deux binômes $a_1^2 - a_0 a_2$, $a_2^2 - a_1 a_3$ ne sont pas nuls : l'équation a deux racines égales; 2° les deux binômes $a_1^2 - a_0 a_2$ et $a_2^2 - a_1 a_3$ sont nuls : l'équation a ses trois racines égales.

β. Si l'équation a ses racines réelles, les deux binômes $a_1^2 - a_0 a_2$, $a_2^2 - a_1 a_3$ sont positifs. C'est là une condition nécessaire. Si donc, en formant I, on reconnaît qu'un de ces deux binômes est négatif, ou que l'un seulement est nul, on peut abandonner le calcul et affirmer que l'équation n'a qu'une racine réelle.

γ. Si l'équation a *deux* racines égales, et si ses coefficients sont numériques et commensurables, les deux binômes $a_1^2 - a_0 a_2$, $a_2^2 - a_1 a_3$ sont carrés parfaits, et la racine double de l'équation est

$$\pm\sqrt{\frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^2 - a_0 a_2}}.$$

Il faut prendre le signe de $a_0 a_3 - a_1 a_2$.