NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PELLET

Sur les cercles tangents à trois cercles et les sphères tangentes à trois ou à quatre sphères

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 316-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__316_1>

SUR LES CERCLES TANGENTS A TROIS CERCLES ET LES SPHÈRES TANGENTES A TROIS OU A QUATRE SPHÈRES;

PAR M. A. PELLET.

1. Les cercles qui passent par les points d'intersection de deux cercles et les coupent sous des angles égaux jouent par rapport aux cercles donnés le même rôle que les bissectrices de deux droites par rapport à ces droites.

Ainsi tout cercle qui est tangent à deux cercles coupe orthogonalement un de leurs cercles bissecteurs, et réciproquement tout cercle qui coupe orthogonalement un des deux cercles bissecteurs de deux cercles et touche l'un d'eux est aussi tangent à l'autre.

On le voit aisément, lorsque les deux cercles se coupent, en transformant la figure par rayons vecteurs réciproques, le pôle de la transformation est en un des deux points de rencontre. Les deux cercles bissecteurs de deux cercles sont réels, si ceux-ci se coupent en deux points réels; dans le cas où les points de rencontre de deux cercles sont imaginaires, l'un des deux cercles bissecteurs est imaginaire, celui qui a pour centre le centre de similitude inverse; les centres des cercles bissecteurs sont les centres de similitude des deux cercles.

2. Soient C_1, C_2 et C_3 trois cercles, et S_{12}, S'_{12}, S_{13}, S'_{13}, S_{23}, S'_{23} leurs cercles bissecteurs. Tout cercle qui coupe orthogonalement les deux cercles S_{12}, S_{13} et touche l'un des cercles C_1, C_2, C_3 est tangent aux deux autres. Il résulte de là que les deux points de rencontre des cercles S_{12}, S_{13} appartiennent à l'un des deux cercles S_{23} ou S'_{23}, et, par suite, les centres de similitude des trois cercles sont trois à trois en ligne droite. La condition de couper orthogonalement les cercles S_{12}, S_{13} équivaut à celle de passer par deux points situés sur la ligne des centres des cercles S_{12}, S_{13}; ces points seront donnés, par exemple, par l'intersection de cette ligne avec le cercle coupant orthogonalement les cercles C_1, C_2, C_3.

Ces considérations s'étendent facilement aux sphères, et l'on a les théorèmes suivants :

Étant données quatre sphères, par l'intersection de la sphère qui les coupe orthogonalement et d'un plan *de similitude des quatre sphères, il passe deux sphères tangentes à toutes les sphères données.*

Les sphères qui coupent orthogonalement trois sphères données rencontrent l'un quelconque des axes de similitude des trois sphères en deux points fixes. *Toute sphère qui, passant par ces deux points, touche l'une des trois sphères données, touche les deux autres.*