Nouvelles annales de mathématiques

P. Tardy

Remarques sur une note de M. Ibach

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 257-261

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__257_0>

REMARQUES SUR UNE NOTE DE M. IBACH;

PAR M. P. TARDY, à Gênes.

Dans le dernier Cahier, page 172, M. Ibach donne une méthode pour intégrer les équations linéaires simultanées du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = v_1,$$

$$\frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = v_2,$$

dans le cas où, entre les fonctions P_1, Q_1, P_2, Q_2 de la variable x, existe une relation

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\,dx}.$$

On arrive au même résultat par une voie beaucoup plus simple. Si nous différentions la première équation et si nous éliminons ensuite $\frac{dz}{dx}$ et z, nous aurons

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + \left(P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1} + Q_2\right)\frac{dy}{dx} \\ &\quad + \left(P'_1 + P_1 Q_2 - P_2 Q_1 - P_1 \frac{Q'_1}{Q_1}\right) y = V, \end{aligned} \right.$$

où

$$V = v'_1 + \left(Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1}\right) v_1 - Q_1 v_2.$$

Or on intégrera cette équation si on peut la réduire à la forme

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + X_1 y\right) + X\left(\frac{dy}{dx} + X_1 y\right) = V.$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (X + X_1)\frac{dy}{dx} + (XX_1 + X'_1)y = V.$$

L'intégrale générale sera

$$y = e^{-\int X_1\,dx}\left[A + \int e^{\int (X_1 - X)\,dx}\left(B + \int V e^{\int X\,dx}\,dx\right)dx\right].$$

La question est donc réduite à déterminer les fonctions X et X_1 par les équations

$$X + X_1 = P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1} + Q_2,$$

$$XX_1 + X'_1 = P'_1 + P_1Q_2 - P_2Q_1 - P_1\frac{Q'_1}{Q_1}.$$

Posons

$$X = Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1} + Z,$$

$$X_1 = P_1 - Z;$$

la première est satisfaite et la seconde donne, pour trouver Z,

$$Z' + \left(Q_2 - P_1 - \frac{Q'_1}{Q_1}\right)Z + Z^2 = P_2Q_1,$$

laquelle sera vérifiée si l'on a, en même temps,

$$Z^2 = P_2Q_1 \quad \text{et} \quad \frac{Z'}{Z} = P_1 - Q_2 + \frac{Q'_1}{Q_1}.$$

En éliminant Z, on obtient

$$P_1 - Q_2 = \frac{1}{2}\frac{P'_2}{P_2} - \frac{1}{2}\frac{Q'_1}{Q_1},$$

qui est exactement la relation donnée par M. Ibach. En prenant donc

$$X = Q_2 - \frac{Q'_1}{Q_1} + \sqrt{P_2Q_1} = P_1 - \frac{1}{2}\frac{P'_2}{P_2} - \frac{1}{2}\frac{Q'_1}{Q_1} + \sqrt{P_2Q_1},$$

$$X_1 = P_1 - \sqrt{P_2Q_1},$$

et en substituant dans la formule générale, on aura y et ensuite z sans nouvelle intégration.

Permettez-moi d'ajouter que presque toutes les équations différentielles linéaires du deuxième ordre qu'on a intégrées par des méthodes spéciales sont des cas particuliers de l'équation (2). Je choisirai quelques exemples.

L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{P'}{P} + \frac{R'}{R}\right)\frac{dy}{dx} - \left[\left(\frac{P'}{P}\right)' - \frac{P'}{P}\frac{R'}{R} - a^2\frac{R^2}{P^2}\right]y = 0,$$

intégrée par Euler (*Calc. intégr.*, t. II, p. 116) d'après la connaissance d'un facteur intégrant, rentre dans l'équation (2), si l'on fait

$$X = -\frac{R'}{R} - a\frac{R}{P},$$

$$X_1 = -\frac{P'}{P} - a\frac{R}{P}.$$

Une équation considérée par Petzval et dont M. Spitzer a tiré des résultats particuliers (*Archives de Grunert*, t. LX)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\varphi_2 + \varphi_1 + \frac{\varphi'_2 - \varphi'_1}{\varphi_2 - \varphi_1}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$- \left(\varphi_1\varphi_2 + \frac{\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1}{\varphi_2 - \varphi_1}\right)y = 0$$

se déduit aussi de l'équation (2) en posant

$$X = -\varphi_2 - \frac{\varphi'_2 - \varphi'_1}{\varphi_2 - \varphi_1},$$

$$X_1 = -\varphi_1.$$

On obtient l'équation de M. Burnside (*Miller mathematical Questions*, t. XI)

$$2f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + 3f'(x)\frac{dy}{dx} + [f''(x) \pm n^2]y = 0,$$

en prenant

$$X = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\theta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\theta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

et en mettant $\theta = n\sqrt{-1}$ ou $\theta = n$, selon que l'on a dans l'équation le signe supérieur ou inférieur.

M. Cockle (*Miller mathematical Questions*, t. IX) a intégré l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{R'}{2R} + a\sqrt{R}\right)\frac{dy}{dx} + Ry = 0:$$

ici il faut poser

$$X = -\frac{R'}{2R} - (a-c)\sqrt{R},$$

$$X_1 = c\sqrt{R},$$

et déterminer c par l'équation

$$c(a+c) + 1 = 0.$$

Aussi l'équation proposée et intégrée par M. Malet (*Mathematical Questions*, t. XXIII),

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + \left[\frac{P^2 - R^2}{4} + \frac{1}{2}(P' - R')\right]y = 0.$$

rentre dans l'équation (2), en mettant

$$X = \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}R,$$

$$X_1 = \tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}R.$$

Si l'on veut y faire rentrer l'équation considérée par M. Malmsten (*Dublin and Cambridge mathem. Journ.*, t. III, *Journal de Crelle*, t. 39, et Brioschi, *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, t. II),

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{r}{x}\frac{dy}{dx} - \left(bx^m + \frac{s}{x^2}\right)y = 0.$$

on mettra

$$X = \frac{1}{2}\frac{r}{x} - z,$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\frac{r}{x} + z,$$

et l'on aura, pour déterminer z, l'équation

$$4x^2\frac{dz}{dx} - 4x^2z^2 = -4bx^{m+2} - (r^2 - 2r + 4s).$$

Si l'on fait

$$z = \frac{v+k}{x},$$

où k est donné par l'équation

$$(2k+1)^2 = (r-1)^2 + 4s,$$

on réduit la précédente à

$$x\frac{dv}{dx} - (2k+1)v - v^2 = -bx^{m+2}.$$

Maintenant on sait (Boole, *Differential equations*, p. 95) que l'équation

$$x\frac{dy}{dx} - ay + cy^2 = ex^n$$

est intégrable par des quadratures indéfinies toutes les fois que $\frac{n \pm 2a}{2n}$ est un nombre entier positif q; donc, dans notre cas, on aura la condition

$$\frac{m+2 \pm (2k+1)}{2(m+2)} = q,$$

c'est-à-dire

$$m + 2 = \pm\frac{2(2k+1)}{2q-1},$$

et, en substituant pour $2k+1$ sa valeur,

$$m + 2 = \pm\frac{2\sqrt{(r-1)^2 + 4s}}{2q-1},$$

qui est la condition posée par M. Malmsten.

(16 mai 1884.)