CH. BIEHLER

Sur la transformation des équations

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 209-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__209_0>

SUR LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. Étant donnée une équation algébrique et entière de degré m, $f(x) = 0$, dont les racines sont $a, b, c, \ldots, l$, on se propose de trouver une équation

$$F(y) = 0$$

dont les racines soient des fonctions rationnelles des racines de la proposée.

Supposons d'abord que les racines de l'équation en y soient fonction de deux des racines de l'équation en x

$$y = \varphi(a, b).$$

L'équation transformée

$$F(y) = 0$$

s'obtiendra en égalant à zéro le produit

$$\begin{aligned} F(y) = \; & [y - \varphi(a, a)][y - \varphi(a, b)]\ldots[y - \varphi(a, l)] \\ & \times [y - \varphi(b, a)][y - \varphi(b, b)]\ldots[y - \varphi(b, l)] \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times [y - \varphi(l, a)][y - \varphi(l, b)]\ldots[y - \varphi(l, l)]. \end{aligned}$$

Je dis que l'on peut former l'équation en y au moyen d'éliminations successives d'un seul paramètre entre deux équations.

En effet, si l'on désigne par $\Phi(a, y)$ l'éliminant des deux équations

$$y - \varphi(a, x) = 0, \quad f(x) = 0,$$

on voit que le produit des m facteurs de la première ligne de $F(y)$, savoir :

$$[y - \varphi(a, a)][y - \varphi(a, b)]\ldots[y - \varphi(a, l)],$$

n'est autre chose que $\Phi(a, y)$ à une certaine puissance près du coefficient de x^m dans $f(x)$; par suite, le polynôme $F(y)$ lui-même est le produit

$$F(y) = \Phi(a, y)\,\Phi(b, y)\ldots\Phi(l, y);$$

$F(y)$ est donc l'éliminant des deux équations

$$\Phi(x, y) = 0, \quad f(x) = 0.$$

On voit donc que, pour former l'équation en y cherchée, l'opération que l'on appelle communément éliminer a et b entre les trois équations

$$y = \varphi(a, b),$$
$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0,$$

revient à éliminer b entre les équations

$$y = \varphi(a, b), \quad f(b) = 0,$$

ce qui donne une équation

$$\Phi(a, y) = 0,$$

puis à éliminer a entre

$$\Phi(a, y) = 0, \quad f(a) = 0.$$

Le problème revient donc à deux éliminations ordinaires d'un paramètre entre deux équations.

2. On voit, d'après la composition du polynôme $F(y)$, que l'équation

$$F(y) = 0$$

est du degré m^2; mais, parmi les m^2 racines de cette équation, se trouvent les quantités

$$\varphi(a, a), \quad \varphi(b, b), \quad \ldots, \quad \varphi(l, l).$$

Si l'on veut former l'équation de degré $m(m-1)$ qui n'admet pour racines que les quantités $\varphi(a, b)$, dans lesquelles a et b sont des racines différentes, il suffira de remarquer que le polynôme $\Phi(a, y)$ est divisible par $y - \varphi(a, a)$; le quotient de $\Phi(a, y)$ par $y - \varphi(a, a)$ est un polynôme de degré $m - 1$ en y, $\Phi_1(a, y)$, et le résultat de l'élimination de a entre

$$\Phi_1(a, y) = 0, \quad f(a) = 0$$

donne l'équation

$$F_1(y) = 0$$

de degré $m(m - 1)$ cherchée.

On peut aussi dans le même but diviser $F(y)$ par le polynôme de degré m

$$\psi(y) = [y - \varphi(a, a)][y - \varphi(b, b)]\ldots[y - \varphi(l, l)],$$

que l'on obtient en fonction rationnelle des coefficients de $f(x)$ en éliminant a entre les équations

$$y - \varphi(a, a) = 0, \quad f(a) = 0$$

Si la fonction $\varphi(a, b)$ est symétrique en a et b, le polynôme

$$F_1(y) = \frac{F(y)}{\psi(y)}$$

est le carré d'un polynôme entier en y, à cause de la présence simultanée des facteurs

$$y - \varphi(a, b), \quad y - \varphi(b, a)$$

dans $F(y)$. L'équation cherchée ne sera donc plus que du degré $\dfrac{m(m-1)}{2}$.

Ces considérations s'appliquent à la formation des équations aux sommes, aux différences, aux produits, aux quotients deux à deux des racines d'une équation donnée, ainsi qu'à l'équation aux carrés des différences; il suffit de prendre, pour la fonction $\varphi(a, b)$, l'une des quatre fonctions

$$y = a + b, \quad y = a - b,$$
$$y = ab, \quad y = \frac{a}{b}.$$

3. Considérons maintenant le cas où l'on aurait à former une équation dont les racines soient une fonction de trois racines de l'équation proposée

$$y = \varphi(a, b, c).$$

D'après ce que nous venons de démontrer, le produit $\Psi(a, y)$,

$$\begin{aligned}\Psi(a, y) = \quad & [y - \varphi(a, a, a)][y - \varphi(a, a, b)]\ldots[y - \varphi(a, a, l)] \\ & \times [y - \varphi(a, b, a)][y - \varphi(a, b, b)]\ldots[y - \varphi(a, b, l)] \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times [y - \varphi(a, l, a)][y - \varphi(a, l, b)]\ldots[y - \varphi(a, l, l)],\end{aligned}$$

s'obtient en éliminant c entre les équations

$$y - \varphi(a, b, c) = 0, \quad f(c) = 0,$$

ce qui donne une équation

$$\Phi(a, b, y) = 0;$$

puis en éliminant b entre

$$\Phi(a, b, y) = 0, \quad f(b) = 0.$$

L'équation en y cherchée

$$F(y) = 0$$

s'obtient évidemment en égalant à zéro le produit

$$F(y) = \Psi(a, y)\,\Psi(b, y)\ldots\Psi(l, y);$$

ce produit s'obtient en fonction rationnelle des coefficients de $f(x)$, en éliminant a entre les équations

$$\Psi(a, y) = 0, \quad f(a) = 0.$$

Le problème est donc ramené à trois éliminations successives et ordinaires d'un paramètre entre deux équations.

Il est aisé de voir que la méthode précédente est générale et que le problème de la transformation est ramené de cette manière à l'élimination.

Remarque. — Pour que la méthode des éliminations successives puisse s'employer, il n'est pas nécessaire que a, b, c, ... soient racines d'une même équation. Ainsi, dans le cas où l'on aurait à éliminer a, b, c, ... entre les équations

$$\begin{gathered} f_1(a) = 0, \\ f_2(b) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ f_n(k) = 0, \\ \varphi(a, b, \ldots, k) = 0, \end{gathered}$$

on pourrait éliminer a entre

$$\varphi(a, b, \ldots, k) = 0, \quad f_1(a) = 0,$$

puis b entre l'équation résultant de cette élimination et $f(b) = 0$, etc.

La démonstration de cette proposition est analogue à celle que nous avons donnée pour la formation de l'équation transformée.

4. A cette question de la transformation des équations se rattache la suivante :

Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que n des m racines d'une équation soient liées par une relation

$$\varphi(a, b, \ldots, j) = 0.$$

La condition énoncée s'obtient évidemment en exprimant que l'équation en y dont les racines sont

$$y = \varphi(a, b, \ldots, j)$$

a une racine nulle, c'est-à-dire en égalant à zéro le terme indépendant de y dans l'équation $F(y) = 0$.

Mais il est aisé de traiter directement le problème par une méthode toute semblable à la précédente.

Considérons le cas d'une relation

$$\varphi(a, b) = 0$$

entre deux racines. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une telle relation entre deux racines de l'équation $f(x) = 0$ est évidemment

$$\begin{aligned} &\varphi(a, a)\,\varphi(a, b)\ldots\varphi(a, l)\\ \times\, &\varphi(b, a)\,\varphi(b, b)\ldots\,\varphi(b, l)\\ \times\, &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \times\, &\varphi(l, a)\,\varphi(l, b)\ldots\varphi(l, l) = 0. \end{aligned}$$

Soit V ce produit. Pour former V en fonction des coefficients de $f(x)$, remarquons que le produit des m facteurs de la première ligne s'obtient en cherchant l'éliminant des deux équations

$$\varphi(a, x) = 0, \quad f(x) = 0.$$

Soit $\Phi(a)$ cet éliminant; V sera donc égal au produit

$$V = \Phi(a)\,\Phi(b)\ldots\Phi(l),$$

et il s'obtient par suite, en éliminant x entre les équations

$$\Phi(x) = 0, \quad f(x) = 0.$$

En résumé, la condition $V = 0$ s'obtient donc en éliminant b entre les équations

$$\varphi(a, b) = 0, \quad f(b) = 0,$$

ce qui donne

$$\Phi(a) = 0.$$

puis en éliminant a entre

$$\Phi(a) = 0, \quad f(a) = 0.$$

Il est facile de voir que la condition analogue, pour le cas où la relation $\varphi = 0$ renfermerait plus de deux racines, s'obtient encore par des éliminations successives d'un paramètre entre deux équations.

Dans le cas de deux racines ou dans les cas plus complexes, on peut supposer que les racines a et b, qui figurent dans φ, ne sont pas les mêmes; pour avoir la condition cherchée en faisant cette restriction, il suffit de diviser $\Phi(a)$ par $\varphi(a, a)$ et d'éliminer a entre

$$\frac{\Phi(a)}{\varphi(a, a)} = 0 \quad \text{et} \quad f(a) = 0,$$

ou bien de diviser V par le produit

$$U = \varphi(a, a)\varphi(b, b)\ldots\varphi(l, l),$$

qui est une fonction des coefficients aisée à obtenir.

5. Dans le cas où la relation $V = 0$ est satisfaite, on peut se proposer de trouver les racines a et b satisfaisant à la relation $\varphi(a, b) = 0$ et, par suite, de ramener la résolution de l'équation $f(x) = 0$ à celle d'équations de degré moindre.

Supposons donc que la relation $V = 0$ soit satisfaite, ou plutôt supposons que l'on sache qu'il existe une relation

$$\varphi(a, b) = 0$$

entre deux racines de l'équation $f(x) = 0$.

Le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ susceptibles de satisfaire à la relation

$$\varphi(a, b) = 0,$$

en occupant la place de a, est évidemment égal au nombre des facteurs $\Phi(a)$, $\Phi(b)$, ..., $\Phi(l)$ qui sont nuls; l'équation qui donne ces racines se formera en égalant à zéro le plus grand commun diviseur des polynômes $\Phi(x)$ et $f(x)$; soit $\Delta(x)$ ce plus grand commun diviseur. A chaque racine de l'équation $\Delta(x) = 0$ sont adjointes un certain nombre de racines de $f(x) = 0$ qui occuperont la place de b dans $\varphi(a, b)$.

Supposons que l'équation $\Delta(x) = 0$ soit de degré p et soient a, b, ..., d les racines de cette équation; considérons la quantité

$$\begin{aligned} V_1 = \; & \varphi(a, a)\,\varphi(a, b)\ldots\varphi(a, l) \\ & \times\varphi(b, a)\,\varphi(b, b)\ldots\varphi(b, l) \\ & \times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times\varphi(d, a)\,\varphi(d, b)\ldots\varphi(d, l). \end{aligned}$$

Le produit V_1 est formé par tous les facteurs $\varphi(a, b)$ qui peuvent s'annuler. Or le produit des facteurs de la première colonne est l'éliminant des deux équations

$$\varphi(x, a) = 0, \quad \Delta(x) = 0.$$

Soit $\psi(a)$ cet éliminant, la fonction V_1 est égale à

$$\psi(a) \times \psi(b) \times \ldots \times \psi(l);$$

les racines susceptibles d'occuper la place de b dans la relation $\varphi(a, b) = 0$ sont donc celles qui annulent l'un des facteurs

$$\psi(a), \; \psi(b), \; \ldots, \; \psi(l).$$

On les obtiendra par conséquent en égalant à zéro le plus grand commun diviseur des deux fonctions $\psi(x)$ et $f(x)$: soit $\Delta_1(x)$ ce plus grand commun diviseur; l'équation $\Delta_1(x) = 0$ donne toutes les racines qui peuvent occuper la place de b.

Si, au lieu de chercher le plus grand commun diviseur entre $\psi(x$ et $f(x)$, on avait cherché le plus grand commun diviseur entre $\psi(x)$ et $\frac{f(x)}{\Delta(x)}$, on aurait exclu par là les racines de l'équation $\Delta(x) = 0$ qui peuvent occuper la place de b; on aurait donc, par le fait, restreint la généralité du problème.

Si les deux polynômes $\Delta(x)$ et $\Delta_1(x)$ ne sont pas premiers entre eux, il y a des racines qui peuvent occuper la place de a et celle de b dans la relation

$$\varphi(a, b) = 0;$$

ce sont les racines communes aux deux équations

$$\Delta(x) = 0, \quad \Delta_1(x) = 0.$$

On voit aussi comment la résolution de l'équation $f(x) = 0$ est ramenée à celle d'équations de degré moindre.

6. Supposons maintenant le cas où l'on a une relation

$$\varphi(a, b, c) = 0$$

entre trois racines de l'équation $f(x) = 0$.

D'après ce que nous avons dit précédemment, on voit aisément que, si l'on élimine c entre

$$\varphi(a, b, c) = 0, \quad f(c) = 0,$$

et si l'on désigne par

$$\Phi(a, b) = 0$$

le résultat de l'élimination; puis, si l'on élimine b entre

$$\Phi(a, b) = 0, \quad f(b) = 0,$$

et qu'on appelle $\psi(a) = 0$ l'équation obtenue, les racines a sont données en égalant à zéro le plus grand commun diviseur $\Delta(x)$ des deux polynômes $\psi(x)$ et $f(x)$. Cela fait, si l'on élimine a entre les deux équations

$$\varphi(a, b, c) = 0, \quad \Delta(a) = 0,$$

on obtient une relation

$$F(b, c) = 0,$$

à laquelle satisfont les racines b, c; on adjoint à cette relation les deux conditions

$$f(b) = 0, \quad f(c) = 0,$$

et le problème est ramené au précédent. On restreindrait encore la généralité de la question en adjoignant à la relation

$$F(b, c) = 0$$

les conditions

$$f_1(b) = 0, \quad f_1(c) = 0,$$

$f_1(x)$ désignant le quotient de $f(x)$ par $\Delta(x)$.