NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. ASTOR

Sur les courbes unicursales du quatrième ordre, dont on connait les trois points doubles et cinq points

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 181-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__181_1>

SUR LES COURBES UNICURSALES DU QUATRIÈME ORDRE, DONT ON CONNAIT LES TROIS POINTS DOUBLES ET CINQ POINTS;

Par M. A. ASTOR,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Grenoble.

1. On peut établir, entre les courbes unicursales du quatrième ordre et les coniques, un mode de correspondance fort simple dont nous nous rendrons compte en résolvant le problème suivant :

L'un des foyers d'une conique inscrite à un triangle *donné décrivant une conique donnée, trouver le lieu de l'autre foyer.*

Si nous prenons le triangle pour triangle de référence, et si nous appelons X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées des deux foyers d'une conique inscrite au triangle, nous aurons les relations connues

$$XX_1 = YY_1 = ZZ_1.$$

Si (X_1, Y_1, Z_1) décrit la conique S,

$$\begin{aligned} S = {} & AX_1^2 + A'Y_1^2 + A''Z_1^2 \\ & + 2BY_1Z_1 + 2B'Z_1X_1 + 2B''X_1Y_1 = 0, \end{aligned}$$

on aura, entre les coordonnées de l'autre foyer, la relation

$$(1) \qquad \frac{A}{X^2} + \frac{A'}{Y^2} + \frac{A''}{Z^2} + \frac{2B}{YZ} + \frac{2B'}{ZX} + \frac{2B''}{XY} = 0.$$

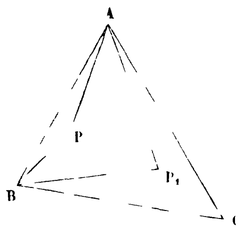
Cette équation représente toutes les courbes unicursales du quatrième ordre dont les trois sommets du triangle donné sont les trois points doubles ; car on peut déterminer les cinq coefficients qui y entrent de manière que la courbe passe par cinq points pris en dehors des trois côtés du triangle. Dans ce procédé de transformation des figures, à une droite correspond une conique circonscrite au triangle et réciproquement.

Pour abréger, nous appellerons U les courbes (1) et Σ les coniques circonscrites au triangle. U est indécomposable en même temps que S; or S n'est une véritable conique que tout autant que trois de ses points ne sont pas en ligne droite; dès lors U ne peut avoir trois points sur une conique Σ; et si l'on se donne cinq points en dehors des trois côtés et satisfaisant à cette condition, ils détermineront effectivement une courbe U, car leurs correspondants détermineront une conique effective S.

2. Voici une construction géométrique très simple pour avoir le point correspondant à un point donné.

Soient ABC (*fig.* 1) le triangle donné et P un point de son plan; joignons AP et BP, et menons les droites également inclinées sur une même bissectrice des angles A

Fig. 1



et B, ces droites se rencontreront au point P_1 correspondant à P; P et P_1 coïncideront donc si l'un d'eux est le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit au triangle ABC.

On pourrait aussi prendre le symétrique de P par rapport au centre du cercle passant par les projections de P sur les trois côtés, et cette construction montre que, si P est sur le cercle circonscrit au triangle, P_1 sera à l'infini sur la perpendiculaire menée de P à la droite de Simson qui lui correspond. Cette remarque nous sera utile par la suite.

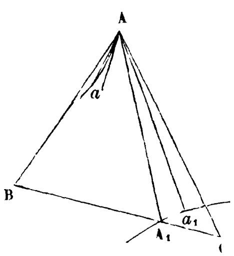
Si P est sur l'un des côtés, P_1 est au sommet opposé. En général, comme nous l'avons vu, à une droite correspond une conique Σ; mais, si la droite passe par l'un des sommets, AP par exemple, la conique correspondante se décompose en un système de deux droites, dont l'une est le côté opposé BC, et l'autre la droite AP_1 qui, à proprement parler, correspond seule à AP.

3. *Construction par points de* U, *quand on en connaît cinq points.* — Construisons les cinq points cor-

respondant aux points donnés; ils déterminent la conique S, dont nous pourrons, par les procédés ordinaires, avoir autant de points que nous voudrons; construisant les points correspondant à ces derniers, nous aurons autant de points de U que nous le désirerons. Nous pouvons avoir également la tangente en un point a de U; car, si nous prenons le point a_1 de S qui lui correspond, à la tangente à S en a_1 correspond une conique Σ tangente à U en a, et si l'on cherche un autre point b de cette conique correspondant à un second point b_1 de la tangente, on pourra avoir la tangente en a à la conique Σ qui passe par les points a et b, c'est-à-dire la tangente en a à U.

4. *Construction des tangentes aux points doubles.* — Considérons une branche Aa de U (*fig.* 2) : il lui cor-

Fig. 2.



respond un élément $A_1 a_1$ de S partant de l'un des points A_1 de rencontre de S avec BC; or on a

$$aAB = a_1AC;$$

en passant à la limite, on voit que la tangente en A à Aa est la droite correspondant à AA_1. Pour avoir les tangentes aux trois sommets, il suffit donc de prendre les points de rencontre de S avec l'un des côtés et de construire les droites qui correspondent à celles qui joignent ces points au sommet opposé.

Si BC rencontre S en deux points réels et distincts, A est un point double réel ordinaire; si BC est tangente à S, A est un point de rebroussement, et si D est le point de contact, la tangente de rebroussement sera la droite conjuguée de AD; d'où nous déduisons que, si U a trois points de rebroussement, les trois tangentes de rebroussement sont concourantes, car S est alors inscrite à ABC, et les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés sont concourantes; il en est de même, comme on le sait, pour leurs conjuguées.

Nous pouvons avoir, relativement aux six tangentes à U aux trois points doubles, un théorème général, dont le précédent est un cas particulier. Soient D, D′ les points de rencontre de S avec BC, D_1, D'_1 les points où BC est rencontrée par les droites conjuguées de AD et AD′; il est facile de voir que les six points D_1, D'_1 et les analogues sont situés sur une deuxième conique.

Soit

$$S = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0,$$

et considérons la conique dont l'équation est

$$\begin{aligned} S' = {} & A'A''X^2 + A''AY^2 + AA'Z^2 \\ & + 2ABYZ + 2A'B'ZX + 2A''B''XY = 0. \end{aligned}$$

Si nous faisons $Z = 0$ dans les deux équations, nous obtenons, pour les deux couples de droites joignant les points de rencontre de S et S′ avec Z au sommet XY, les équations

$$AX^2 + A'Y^2 + 2B''XY = 0,$$
$$A'X^2 + AY^2 + 2B''XY = 0,$$

et ce sont bien deux couples de droites conjuguées. Il en est de même pour les autres, et nous pouvons dès lors dire que :

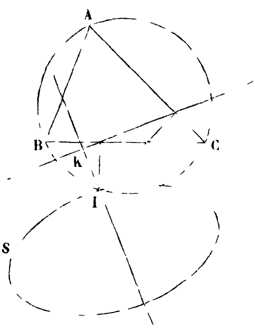
Les six tangentes à une courbe unicursale du qua-

trième ordre en ses trois points doubles coupent les trois côtés du triangle formé par les trois points doubles en six points situés sur une conique.

De sorte que, comme on pouvait le prévoir, la connaissance de cinq de ces tangentes entraîne celle de la sixième. Ce théorème comprend, comme cas particulier, celui qui est relatif aux courbes à trois rebroussements.

5. *Construction des asymptotes.* — Soit I (*fig.* 3) un point commun à S et au cercle circonscrit. Nous avons vu qu'au point I correspond un point à l'infini de

Fig. 3.



U ; la direction asymptotique est la perpendiculaire IK menée à la droite de Simson correspondant à I.

Supposons construite l'asymptote, sa transformée sera une conique Σ tangente à S en I, ce qui la détermine. La parallèle à IK menée par un point correspondant à un point quelconque de cette conique sera l'asymptote. Une construction très simple consistera à chercher, au moyen du théorème de Pascal, la tangente à cette conique en l'un des sommets, A par exemple ; la droite conjuguée de cette tangente coupera BC en un point de la transformée, c'est-à-dire de l'asymptote.

On aura donc les asymptotes de la courbe, si l'on connaît les points de rencontre de S et du cercle circonscrit. Si S était tangente au cercle circonscrit, deux asymptotes deviendraient parallèles; la conique Σ considérée devient le cercle circonscrit lui-même dont la transformée est la droite de l'infini; les deux asymptotes s'éloignent donc à l'infini, ce qu'on pouvait prévoir; car, si elles restaient à distance finie, U aurait quatre points doubles, ce qui est impossible. Si S était osculatrice au cercle circonscrit, trois asymptotes iraient à l'infini; les quatre iraient à l'infini dans une même direction si S et le cercle circonscrit étaient deux courbes surosculatrices, c'est-à-dire si l'osculation avait lieu en un sommet de S.

6. *Points d'inflexion.* — A une tangente à U correspond une Σ tangente à S; à une tangente d'inflexion à U correspond une Σ osculatrice à S; on aura donc les points d'inflexion de U en transformant les points de contact de S avec les Σ qui lui sont osculatrices. Il est facile dès lors d'avoir une courbe sur laquelle sont situés les points d'inflexion de U.

Soit, en effet,

$$S = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0;$$

l'équation d'une conique osculatrice à S au point (x, y, z) sera

$$S - (XS'_x + YS'_y + ZS'_z)(lX + mY + nZ) = 0,$$

si l'on a

$$lx + my - nz = 0.$$

Pour que la conique soit une Σ, il faudra que

$$\begin{aligned} A &- lS'_x = 0, \\ A' &- mS'_y = 0, \\ A'' &- nS'_z = 0, \end{aligned}$$

et, par suite, il y a six points donnés par l'intersection de S avec la cubique

$$\frac{AX}{S'_X}+\frac{A'Y}{S'_Y}+\frac{A''Z}{S'_Z}=0.$$

Il y a donc six points d'inflexion, qui sont donnés par l'intersection de U avec la courbe du sixième ordre

$$\frac{AYZ}{AYZ+B''ZX+B'XY}+\frac{A'ZX}{B''YZ+A'ZX+BXY}+\frac{A''XY}{B'YZ+BZX+A''XY}=0.$$

Cette courbe, bien plus commode que la hessienne, a trois points triples aux sommets du triangle de référence; elle coupe U en six points confondus en chacun de ces sommets et six points distincts de ces derniers qui sont les six points d'inflexion.

7. Dans le procédé de transformation employé, à une droite a_1b_1 correspond une conique Σ passant par a et b conjugués de a_1 et b_1; nous la désignerons par Σab. Au point de rencontre de deux droites a_1b_1, c_1d_1, correspond le quatrième point commun à Σab, Σcd. A la tangente en a_1 à S correspond une conique Σ tangente à U en a; nous la désignerons par Σa^2.

De cette réciprocité naissent un grand nombre de théorèmes, dont nous allons énoncer quelques-uns :

1° *Il n'y a qu'une conique* S *tangente à cinq droites; il n'existe qu'une courbe* U *tangente à cinq coniques* Σ.

Le théorème corrélatif du théorème de Pascal est le suivant :

Six points de U *étant considérés dans l'ordre abcdef, les quatrièmes points communs aux trois groupes de coniques* (Σab, Σde), (Σbc, Σef), (Σcd, Σfa) *sont sur une même conique* Σ.

Transformons le théorème de Brianchon :

Considérons six Σ *tangentes à* U, *et leurs quatrièmes points communs successifs ; en les numérotant dans l'ordre* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les coniques* Σ_{14}, Σ_{25}, Σ_{36} *ont un quatrième point commun.*

On sait que les six sommets d'un hexagone circonscrit à S sont sur une même conique : donc, si l'on considère les six coniques Σa^2, Σb^2, Σc^2, Σd^2, Σe^2, Σf^2, dans l'ordre circulaire indiqué, chacune coupe la suivante en un point, et les six points ainsi obtenus sont sur une même courbe U.

Citons encore, comme exemple de ces transformations, qui sont, comme on le voit, en nombre indéfini, le théorème suivant :

Deux côtés d'un triangle inscrit dans S *passent par deux points fixes* p_1, q_1 ; *le troisième côté enveloppe une conique* S_1 *bitangente à* S *en ses points de rencontre avec la droite* pq.

Théorème corrélatif :

Si l'on prend un point quelconque a *sur une courbe* U, *et deux points* p, q *de son plan, les coniques* Σap, Σaq *rencontrent* U *en deux nouveaux points* b *et* c; *l'enveloppe de* Σbc *est une courbe* U_1 *bitangente à* U *en ses points de rencontre avec* Σpq.

8. Cette transformation des figures conduit à une propriété remarquable des droites de Simson, à savoir que (¹) :

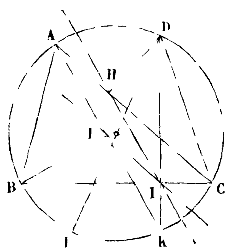
Les droites de Simson sont les asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites au triangle.

(¹) *Voir* Weill, *Journal de Mathématiques spéciales,* 2ᵉ série, t. III, p. 16. Ch. B.

Quelques préliminaires seront utiles pour la démonstration. Au centre du cercle circonscrit correspond, d'après une propriété bien connue, le point de concours des hauteurs; donc à un diamètre DE du cercle circonscrit correspond une conique Σ passant par le point de concours des hauteurs, c'est-à-dire une hyperbole équilatère; les asymptotes de cette conique sont perpendiculaires aux droites de Simson relatives aux points D et E, ce qui nous montre que les droites de Simson correspondant à deux points diamétralement opposés sont rectangulaires.

Menons la droite de Simson IH (*fig.* 4) correspondant

Fig. 4.



à D et joignons A au deuxième point K de rencontre de DI avec le cercle; IH et AK sont parallèles.

En effet, dans le quadrilatère inscriptible DHIC, on a

$$\widehat{IHC} = \widehat{IDC},$$

et par suite

$$\widehat{IHC} = \widehat{KAC},$$

ce qui démontre la proposition.

Du point B menons BL perpendiculaire à AK, et joignons IL; en vertu du théorème précédent, cette droite est parallèle à AC, car c'est la droite de Simson relative à B pour le triangle AKD.

Cela posé, considérons l'hyperbole Σ asymptote à IH, et cherchons, au moyen du théorème de Pascal, son second point de rencontre avec BL. Pour cela, numérotons 1, 2 les deux points à l'infini suivant IH, 3, 4, 5 les sommets du triangle dans l'ordre ACB, et 6 le point inconnu; les points de rencontre de (12), (45), c'est-à-dire I, de (23), (56), c'est-à-dire L, et de (34), (61) sont en ligne droite; donc ce dernier est à l'infini, puisque (34), c'est-à-dire AC, est parallèle à IM. Or la droite 61 n'est point parallèle à AC, car elle est parallèle à IH; donc 61 est tout entière à l'infini, c'est-à-dire que la deuxième direction asymptotique est perpendiculaire à la première, et l'hyperbole est équilatère; de sorte que, d'après une propriété connue, si l'on prend les droites de Simson correspondant aux extrémités d'un diamètre, elles se coupent à angle droit sur le cercle des neuf points.

9. Cette propriété des droites de Simson se démontre aisément par le calcul de la façon suivante :

Prenons pour axes deux côtés du triangle; les équations de deux droites rectangulaires étant

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0,$$
$$(\beta - \alpha\cos\theta)x - (\alpha - \beta\cos\theta)y + \lambda = 0,$$

l'équation de l'hyperbole équilatère dont ces droites sont les asymptotes et qui passe par l'origine sera

$$(\alpha x + \beta y - 1)[(\beta - \alpha\cos\theta)x - (\alpha - \beta\cos\theta)y + \lambda] + \lambda = 0.$$

Appelant a et b les longueurs des deux côtés dirigés suivant Ox et Oy, nous aurons, pour exprimer que l'hyperbole est circonscrite au triangle, les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\lambda}{\beta - \alpha\cos\theta},\\ b &= \frac{1}{\beta} + \frac{\lambda}{\alpha - \beta\cos\theta}.\end{aligned}\right.$$

Les équations des perpendiculaires à Ox et Oy en leurs points de rencontre avec la droite

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0$$

sont

$$y = -\frac{1}{\cos\theta}\left(x - \frac{1}{\alpha}\right),$$

$$y - \frac{1}{\beta} = -x\cos\theta.$$

Appelant x_1 et y_1 les coordonnées de leur point de rencontre, nous avons à montrer que ce point est sur le cercle circonscrit, c'est-à-dire que

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta - ax_1 - by_1 = 0.$$

Or on a

$$x_1 + y_1\cos\theta = \frac{1}{\alpha},$$

$$x_1\cos\theta + y_1 = \frac{1}{\beta};$$

d'où

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta = \frac{x_1}{\alpha} + \frac{y_1}{\beta},$$

et

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta - ax_1 - by_1 \\ = \left(\frac{1}{\alpha} - a\right)x_1 + \left(\frac{1}{\beta} - b\right)y_1; \end{aligned}$$

d'autre part,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\beta - \alpha\cos\theta}{\alpha\beta\sin^2\theta}, \\ y_1 &= \frac{\alpha - \beta\cos\theta}{\alpha\beta\sin^2\theta}, \end{aligned}\right.$$

et, en vertu de (1),

$$\left(\frac{1}{\alpha} - a\right)x_1 + \left(\frac{1}{\beta} - b\right)y_1 = \lambda\left(\frac{x_1}{\beta - \alpha\cos\theta} - \frac{y_1}{\alpha - \beta\cos\theta}\right) = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

En éliminant λ entre les équations (1), on a la relation

$$\frac{a - \frac{1}{\alpha}}{b - \frac{1}{\beta}} = - \frac{\alpha - \beta \cos\theta}{\beta - \alpha \cos\theta},$$

qui est l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites de Simson représentées par l'équation

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0.$$

On voit que cette enveloppe est une courbe de la troisième classe, dont il serait aisé d'avoir l'équation en coordonnées rectilignes.

10. Nous avons supposé jusqu'ici que la courbe U a ses trois points doubles réels. Or il peut y en avoir deux imaginaires conjugués. Dans ce cas, on peut considérer ces derniers comme résultant de l'intersection d'une droite et d'un cercle réels et les projeter suivant les deux ombilics du plan de projection. Les courbes considérées peuvent donc être regardées comme les projections de courbes unicursales du quatrième ordre ayant pour points doubles, d'une part un point donné, d'autre part les ombilics du plan, et, au point de vue des propriétés projectives, ces dernières peuvent remplacer les premières, comme le cercle peut remplacer la conique.

Si nous revenons au procédé de transformation employé, le triangle de référence est formé par la droite de l'infini et les deux droites isotropes issues du point double reel, et, en plaçant l'origine des coordonnées rectangulaires en ce dernier point, les formules de transformation sont

$$X + iY = \frac{K^2}{x + iy} = \frac{K^2(x - iy)}{x^2 + y^2},$$

$$X - iY = \frac{K^2}{x - iy} = \frac{K^2(x + iy)}{x^2 + y^2},$$

x, y, X, Y étant les coordonnées des deux points correspondants. On en déduit

$$X = \frac{K^2 x}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{K^2 y}{x^2 + y^2},$$

de sorte que la courbe XY est la transformée, par rayons vecteurs réciproques, de la courbe xy que l'on a fait tourner de 180° autour du point double réel pris pour pôle de transformation.

Donc les transformées par rayons vecteurs réciproques des coniques sont des courbes unicursales du quatrième ordre, et les propriétés démontrées pour ces dernières donnent des propriétés correspondantes de ces transformées, pourvu qu'on modifie convenablement les énoncés.

Par exemple, le théorème de Pascal se transforme ici en le suivant :

Si, sur la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une conique, on prend six points quelconques dans l'ordre abcdef, les couples de cercles passant par le pôle de transformation et par les points (ab, de), (bc, ef), (cd, fa) se coupent en trois points qui, avec le pôle de transformation, sont sur un même cercle.