Nouvelles annales de mathématiques

IBACH

De l'intégration d'une classe de systèmes d'équations simultanées, linéaires et du premier ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 3 (1884), p. 172-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1884_3_3__172_1>

DE L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES, LINÉAIRES ET DU PREMIER ORDRE ;

PAR M. IBACH,

Licencié ès sciences mathématiques et ès sciences physiques.

I. On sait que la forme la plus générale d'un système d'équations différentielles, linéaires et simultanées du premier ordre est la suivante :

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z &= v_1, \\
\frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z &= v_2,
\end{aligned}
\right.
$$

et la méthode de d'Alembert conduit à démontrer que la résolution d'un pareil système dépend de l'intégration d'une équation différentielle de la forme

$$
\frac{du}{dx} + Au + Bu^2 = C,
$$

dans laquelle A, B, C sont des fonctions de x. Or Euler a prouvé que l'on ne peut intégrer cette dernière équation que si l'on en connaît *a priori* une solution particulière. En thèse générale, le problème est donc insoluble; on va voir toutefois qu'en modifiant légèrement la méthode de d'Alembert, on arrive à intégrer facilement une classe nombreuse de systèmes d'équations simultanées.

II. A cet effet, multiplions par les paramètres θ_1 et θ_2 les équations (1); ajoutant ensuite et retranchant tour à tour les équations ainsi obtenues, nous avons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_1\frac{dy}{dx}+\theta_2\frac{dz}{dx}+y(P_1\theta_1+P_2\theta_2)\\ &\qquad +z(Q_1\theta_1+Q_2\theta_2)=v_1\theta_1+v_2\theta_2,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_1\frac{dy}{dx}-\theta_2\frac{dz}{dx}+y(P_1\theta_1-P_2\theta_2)\\ &\qquad +z(Q_1\theta_1-Q_2\theta_2)=v_1\theta_1-v_2\theta_2.\end{aligned}\right.$$

Je pose

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \theta_1 y+\theta_2 z=\xi,\\ \theta_1 y-\theta_2 z=\zeta;\end{aligned}\right.$$

je différentie ces dernières équations, et j'obtiens

$$(5)\qquad \theta_1\frac{dy}{dx}+\theta_2\frac{dz}{dx}+y\frac{d\theta_1}{dz}+z\frac{d\theta_2}{dx}=\frac{d\xi}{dx},$$

$$(6)\qquad \theta_1\frac{dy}{dx}-\theta_2\frac{dz}{dx}+y\frac{d\theta_1}{dz}-z\frac{d\theta_2}{dx}=\frac{d\zeta}{dx}.$$

Entre les six équations qui précèdent, il est possible d'éliminer les quantités y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Pour y parvenir, retranchons d'abord l'équation (5) de l'équation (2) et l'équation (6) de l'équation (3); nous trouvons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(P_1\theta_1+P_2\theta_2-\frac{d\theta_1}{dx}\right)y\\ &\qquad +\left(Q_1\theta_1+Q_2\theta_2-\frac{d\theta_2}{dx}\right)z=v_1\theta_1+v_2\theta_2-\frac{d\xi}{dx},\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(P_1\theta_1-P_2\theta_2-\frac{d\theta_1}{dx}\right)y\\ &\qquad +\left(Q_1\theta_1-Q_2\theta_2+\frac{d\theta_2}{dx}\right)z=v_1\theta_1-v_2\theta_2-\frac{d\zeta}{dx},\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles il ne reste plus que les quantités y et z.

D'autre part, les équations (4) fournissent immédiatement y et z en fonction de θ_1, θ_2, ξ et ζ,

$$y = \frac{\xi + \zeta}{2\theta_1}, \quad z = \frac{\xi - \zeta}{2\theta_2},$$

de telle sorte que l'élimination proposée se trouvera complètement réalisée si l'on remplace, dans les équations (7) et (8), y et z par leurs valeurs

$$\begin{aligned}&\left(P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}\right)\left(\frac{\xi+\zeta}{2\theta_1}\right)\\ &\quad + \left(Q_1\theta_1 + Q_2\theta_2 - \frac{d\theta_2}{dx}\right)\left(\frac{\xi-\zeta}{2\theta_2}\right) = v_1\theta_1 + v_2\theta_2 - \frac{d\xi}{dx},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}\right)\left(\frac{\xi+\zeta}{2\theta_1}\right)\\ &\quad + \left(Q_1\theta_1 - Q_2\theta_2 + \frac{d\theta_2}{dx}\right)\left(\frac{\xi-\zeta}{2\theta_2}\right) = v_1\theta_1 - v_2\theta_2 - \frac{d\zeta}{dx};\end{aligned}$$

ou, en ordonnant en ξ et ζ,

$$(9)\left\{\begin{aligned}&\frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{2\theta_1} + \frac{Q_1\theta_1 + Q_2\theta_2 - \frac{d\theta_2}{dx}}{2\theta_2}\right)\xi\\ &\quad + \left(\frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{2\theta_1} - \frac{Q_1\theta_1 + Q_2\theta_2 - \frac{d\theta_2}{dx}}{2\theta_2}\right)\zeta = v_1\theta_1 + v_2\theta_2,\end{aligned}\right.$$

$$(10)\left\{\begin{aligned}&\frac{d\zeta}{dx} + \left(\frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{2\theta_1} + \frac{Q_1\theta_1 - Q_2\theta_2 + \frac{d\theta_2}{dx}}{2\theta_2}\right)\xi\\ &\quad + \left(\frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{2\theta_1} - \frac{Q_1\theta_1 - Q_2\theta_2 + \frac{d\theta_2}{dx}}{2\theta_2}\right)\zeta = v_1\theta_1 - v_2\theta_2.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations ne sont pas plus facilement intégrables que les équations initiales ; mais il faut bien remarquer que, des quatre fonctions ξ, ζ, θ_1 et θ_2, deux sont absolument arbitraires, et que, par conséquent, il est permis de choisir deux d'entre elles, θ_1 et θ_2 par exemple, de façon à simplifier les équations (9) et (10). Or on peut disposer de θ_1 et de θ_2, de manière à égaler à o le coefficient de ζ dans l'équation (9) et de ξ dans l'équation (10), en écrivant

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} &= \frac{Q_1\theta_1 + Q_2\theta_2 - \frac{d\theta_2}{dx}}{\theta_2}, \\ \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} &= -\frac{Q_1\theta_1 - Q_2\theta_2 + \frac{d\theta_2}{dx}}{\theta_2}; \end{aligned}\right.$$

et il est facile de voir qu'on aura ainsi transformé les équations (9) et (10) en équations linéaires de premier ordre, de la forme

$$\frac{d\xi}{dx} + U\xi = M,$$

$$\frac{d\zeta}{dx} + S\zeta = N.$$

Si les équations (11) permettaient de déterminer θ_1 et θ_2, les équations (9) et (10) transformées fourniraient toujours ξ et ζ. Il ne resterait donc plus, pour avoir y et z, qu'à porter dans les équations (4) les valeurs de θ_1, θ_2, ξ et ζ une fois connues, et il est clair que les valeurs de y et z contiendraient deux constantes arbitraires introduites par les intégrations des équations (9) et (10) transformées.

On le voit, toute la solution du problème dépend actuellement des équations (11). Pourra-t-on en tirer des valeurs acceptables de θ_1 et θ_2? C'est ce que nous allons étudier.

A cet effet, ajoutons et retranchons ces équations membre à membre :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{P_1\theta_1 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} &= \frac{Q_2\theta_2 - \frac{d\theta_2}{dx}}{\theta_2}, \\ P_2(\theta_2)^2 - Q_1(\theta_1)^2 &= 0. \end{aligned}\right.$$

De cette dernière équation, on tire

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}};$$

quant à la première, elle peut s'écrire sous la forme

$$P_1 - \frac{\frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = Q_1 - \frac{\frac{d\theta_2}{dx}}{\theta_2},$$

et, en l'intégrant immédiatement, on obtient encore

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = e^{\int(P_1 - Q_2)\,dx}.$$

Mais ces deux valeurs de $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ doivent être identiques; nous avons donc la relation

$$(A) \qquad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int(P_1 - Q_2)\,dx}.$$

Les équations (11) qui, en thèse générale, sont incompatibles, pourront donc, toutes les fois que la relation (A) sera réalisée, se réduire à la seule

$$\frac{\theta_1}{\sqrt{P_2}} = \frac{\theta_2}{\sqrt{Q_1}},$$

dont on peut conclure que l'on aura trouvé des valeurs acceptables de θ_1 et θ_2, si l'on prend ces valeurs respectivement proportionnelles à $\sqrt{P_2}$ et $\sqrt{Q_1}$.

On peut, pour simplifier, supposer que θ_1 et θ_2 sont respectivement égaux à $\sqrt{P_2}$ et $\sqrt{Q_1}$.

III. Ce qui précède conduit à formuler le théorème suivant :

Le système d'équations différentielles et simultanées de d'Alembert est intégrable toutes les fois qu'entre *les coefficients* P_1, P_2, Q_1, Q_2 *des variables* y *et* z, *existe la relation*

$$\text{(A)}\qquad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\,dx}.$$

IV. Nous avons dit qu'en employant les hypothèses (11), les équations (9) et (10), qui donnent ξ et ζ, se simplifient; elles deviennent, en effet, dans ce cas,

$$\frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1}\right)\xi = v_1\theta_1 + v_2\theta_2,$$

$$\frac{d\zeta}{dx} + \left(\frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1}\right)\zeta = v_1\theta_1 - v_2\theta_2.$$

Ce sont de simples équations linéaires et du premier ordre, d'où l'on tire immédiatement

$$\xi = e^{-\int \frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1}dx}\left[\int (v_1\theta_1 + v_2\theta_2)\,e^{\int \frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1}dx} + C\right],$$

$$\zeta = e^{-\int \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1}dx}\left[\int (v_1\theta_1 - v_2\theta_2)\,e^{\int \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1}dx} + C'\right]$$

En posant, pour simplifier,

$$\frac{P_1\theta_1 + P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = \Omega,$$

$$\frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = \Psi,$$

j'aurai pour y et z les valeurs suivantes :

$$\text{(B)}\quad \left\{\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\theta_1}e^{-\int\Omega\,dx}\left[\int(v_1\theta_1 + v_2\theta_2)e^{\int\Omega\,dx} + C\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\theta_1}e^{-\int\Psi\,dx}\left[\int(v_1\theta_1 - v_2\theta_2)e^{\int\Psi\,dx} + C'\right], \\ z &= \frac{1}{2\theta_1}e^{-\int\Omega\,dx}\left[\int(v_1\theta_1 + v_2\theta_2)e^{\int\Omega\,dx} + C\right] \\ &\quad - \frac{1}{2\theta_1}e^{-\int\Psi\,dx}\left[\int(v_1\theta_1 - v_2\theta_2)e^{\int\Psi\,dx} + C'\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier où il n'y a pas de seconds membres, c'est-à-dire si v_1 et v_2 sont égaux à o, ces valeurs se simplifient encore et deviennent

$$(C)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{Ce^{-\int \Omega\, dr} - C'e^{-\int \Psi\, dr}}{2\theta_1}, \\[2ex] z = \dfrac{Ce^{-\int \Omega\, dr} - C'e^{\int \Psi\, dr}}{2\theta_1}. \end{cases}$$

IV. L'étude de la relation (A) conduit aux remarques suivantes :

Remarque I. — La relation (A) ne contenant pas trace des seconds membres v_1 et v_2, on peut en conclure que la difficulté d'intégrer un système d'équations différentielles et simultanées n'est pas augmentée par la complication de leurs seconds membres.

Remarque II. — Si nous supposons que P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont des constantes, la relation (A) est *identiquement* vérifiée. Nous nous retrouvons donc ici en présence de ce résultat connu, que le système d'équations (1) est intégrable dans le cas où les coefficients sont constants.

Remarque III. — Si nous posons $P_2 = 0$, $Q_1 = 0$, la condition (A) est encore *identiquement* vérifiée. Il est facile de constater en effet que, dans ce cas, les équations du système initial deviennent de simples équations linéaires et du premier ordre, l'une en y, et l'autre en z, qu'il est possible d'intégrer immédiatement.

Remarque IV. — D'une manière générale, la condition (A) étant une relation entre les quantités P_1, P_2, Q_1, Q_2, si nous en choisissons trois d'une manière arbitraire, la quatrième se trouve déterminée, soit immédiatement, soit par une quadrature.

V. Avant de terminer, observons encore que, dans le cas particulier où $P_1 = Q_2$, la relation (A) indique qu'il suffit, pour rendre intégrable le système fondamental, que les deux autres coefficients soient dans un rapport constant. Nous pouvons donc formuler le théorème suivant :

Théorème II. — *Si le coefficient d'une variable dans une des équations* (1) *est égal au coefficient de l'autre variable dans l'autre, et que le rapport des deux autres coefficients soit constant, le système d'équations de d'Alembert est intégrable par la méthode précédente.*

VI. Nous allons, pour achever, donner de cette méthode quelques applications qui ne sont peut-être pas sans intérêt.

Application I. — Soit à intégrer le système

$$\frac{dy}{dx} + xy + x^2 z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} - a^2 x^2 y + xz = 0.$$

La condition (A), en observant que x correspond à P_1, $(a^2 x^2)$ à P_2, x^2 à Q_1, x à Q_2 et que ν_1 et ν_2 sont nuls, la condition (A) se trouve vérifiée (théorème II).

Les fonctions θ_1 et θ_2, qui, dans le cas général, sont égales à $\sqrt{P_2}$ et $\sqrt{Q_1}$, sont par conséquent représentées respectivement par ax et x.

Par conséquent encore

$$\Omega = \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = ax^2 + x - \frac{1}{x},$$

$$\Psi = \frac{P_1\theta_1 - P_2\theta_2 - \frac{d\theta_1}{dx}}{\theta_1} = - ax^2 \quad x - \frac{1}{x}.$$

Comme les équations proposées n'ont pas de seconds membres, les formules (C) donnent immédiatement

$$y = \frac{C e^{\log x - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}} + C' e^{\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{ax^3}{3}}}{2ax},$$

$$z = \frac{C e^{\log x - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^3}{3}} - C' e^{\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{ax^3}{3}}}{2ax}.$$

Application II. — Soit à intégrer le système

$$\frac{dy}{dx} + e^{2x} z = v_1,$$

$$\frac{dz}{dx} + a^2 e^{2x} y = v_2.$$

Ici

$$P_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad P_2 = a^2 e^{2x}, \quad Q_1 - e^{2x},$$

donc

$$\theta_1 = ae^x, \quad \theta_2 = e^x,$$

donc encore

$$\Omega = ae^{2x} - 1, \quad \Psi = -ae^{2x} - 1;$$

y et z sont fournis par les formules (B) :

$$y = \frac{1}{2ae^x} e^{x - \frac{ae^{2x}}{2}} \left[\int (v_1 a + v_2) e^x e^{\frac{ae^{2x}}{2} - x} + C \right]$$
$$+ \frac{1}{2ae^x} e^{x + \frac{a}{2} e^{2x}} \left[\int e^x (v_1 a + v_2) e^{-x - \frac{a}{2} e^{2x}} + C' \right],$$

$$z = \frac{1}{2ae^x} e^{x - \frac{ae^{2x}}{2}} \left[\int (v_1 a + v_2) e^x e^{\frac{ae^{2x}}{2} - x} + C \right]$$
$$- \frac{1}{2ae^x} e^{x + \frac{a}{2} e^{2x}} \left[\int e^x (v_1 a + v_2) e^{-x - \frac{a}{2} e^{2x}} + C \right].$$

Application III. — Soit à intégrer le système

$$\frac{dy}{dr} + \frac{e^x + 1}{x} y + z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} + x^2 y + \frac{e^x}{x} z = 0.$$

La condition (A) est vérifiée. En effet,

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = \frac{x}{1} = x.$$

D'autre part,

$$P_1 - Q_2 = \frac{1}{x};$$

donc

$$\int (P_1 - Q_2)\, dx = \log x,$$

de plus

$$e^{\log x} = x;$$

nous avons donc

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\, dx}.$$

Les seconds membres étant nuls, on a, d'après les formules (C), en remplaçant Ω et Ψ par les valeurs

$$\Omega = \frac{e^x + 1 + x^2 - 1}{x} = \frac{e^x + x^2}{x},$$

$$\Psi = \frac{e^x + 1 - x^2 - 1}{x} = \frac{e^x - x^2}{x},$$

et

$$y = \frac{C e^{-\int \frac{e^x + x^2}{x} dx} + C' e^{-\int \frac{e^x - x^2}{x} dx}}{2x},$$

$$z = \frac{C e^{-\int \frac{e^x + x^2}{x} dx} - C' e^{-\int \frac{e^x - x^2}{x} dx}}{2x}.$$