

A. DE SAINT-GERMAIN

**Étude sur le mouvement d'un point pesant**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1883), p. 542-554

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1883\\_3\\_2\\_\\_542\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1883_3_2__542_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## ETUDE SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT PESANT;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

---

L'étude du mouvement apparent d'un point matériel libre, soumis à la seule influence de la pesanteur, est une des plus simples qu'on puisse se proposer comme application des théories du mouvement relatif; c'est peut-être une raison pour discuter avec attention certaines parties du problème. J'examinerai d'abord un simple point de détail : dans un Mémoire inséré au *Journal de Liouville* pour 1862, Bour disait que, si l'on regarde l'attraction terrestre comme constante en grandeur et en direction, un point pesant nous semble se mouvoir sur une parabole qui tourne uniformément autour d'un certain axe; dans les *Nouvelles Annales* pour 1872, M. Resal conteste ce résultat; or on pourra voir que les formules mêmes du savant auteur de la *Mécanique générale* conduisent précisément à la proposition

énoncée par Bour. D'ailleurs, c'est ordinairement la résultante de l'attraction terrestre et de la force centrifuge, c'est-à-dire la pesanteur, qu'on traite comme une force constante; j'essaye de donner une interprétation géométrique simple aux équations du mouvement qui résultent de cette hypothèse. Le développement en série des coordonnées d'un point qu'on laisse tomber sans vitesse initiale ne donne pas de valeur sensible pour la déviation vers le sud que semblent indiquer les expériences de Reich, expériences classiques, mais dont M. Gilbert a signalé les discordances; cherchant ce que serait la déviation si l'attraction du globe pouvait être assimilée à celle d'un ellipsoïde homogène, je trouve une valeur encore peu sensible, quoique supérieure à celle qui répond à une direction constante pour la pesanteur. En regardant toujours la Terre comme un ellipsoïde homogène, on trouve des équations compliquées pour le mouvement d'un point lancé à l'extérieur; mais il nous sera facile d'en obtenir des intégrales suffisamment approchées pour toutes les vérifications expérimentales qu'on pourrait essayer.

Soient :

O le centre de la Terre;

A un point de l'hémisphère boréal dont la latitude est  $\varphi$ , et d'où partira le mobile que nous considérons;

Ox la projection de OA sur l'équateur;

Oz la partie de l'axe du monde dirigée vers le nord;

Oy la perpendiculaire à zOx dirigée vers l'ouest;

AX, AY, AZ trois axes menés par le point A et dirigés, le premier suivant la partie sud de la méridienne, le second suivant la ligne est-ouest, le troisième suivant la verticale ascendante;

$\omega$  la vitesse de rotation de la Terre.

Nous supposerons la masse du mobile égale à l'unité. Quant à la disposition de nos axes coordonnés, moins rationnelle que celle de l'Astronomie, c'est celle qu'on adopte ordinairement en Mécanique.

Plaçons-nous d'abord au point de vue de Bour, et regardons l'attraction terrestre comme toujours parallèle à la verticale du point A; nous regarderons aussi l'intensité de cette force comme constante, et nous la représenterons par  $g$ , en sorte que ses composantes suivant  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  seront

$$-g \cos \varphi, 0, -g \sin \varphi;$$

au contraire, pour la force d'inertie d'entraînement, ou force centrifuge, et pour la force centrifuge composée, nous prendrons les composantes exactes données par le théorème de Coriolis, et nous aurons pour les équations du mouvement d'un point pesant rapporté aux axes  $Oxyz$

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -g \cos \varphi + \omega^2 x - 2\omega \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega^2 y + 2\omega \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \sin \varphi. \end{cases}$$

M. Resal (*Nouvelles Annales*, 1872, p. 436) met les intégrales de ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \frac{g}{\omega^2} \cos \varphi + A \cos(\omega t + \alpha) + Bt \cos(\omega t + \beta), \\ y &= A \sin(\omega t + \alpha) + Bt \sin(\omega t + \beta), \\ z &= -\frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi + Ct + D. \end{aligned}$$

Maintenant rapportons les positions du mobile à trois axes entraînés dans le mouvement de la Terre et en même temps mobiles par rapport à l'observateur : par

un point  $O_1$ , pris sur  $Ox$  à une distance  $\frac{g \cos \varphi}{\omega^2}$  du point  $O$ , passeront deux des axes  $O_1 x_1$ ,  $O_1 y_1$ , situés dans l'équateur et faisant respectivement avec  $O_1 x$  les angles  $\omega t + \beta$ ,  $\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}$ ; le troisième axe,  $O_1 z_1$ , sera parallèle à  $Oz$ . Les coordonnées du mobile par rapport à  $O_1 x_1 y_1 z_1$  seront

$$\begin{aligned} x_1 &= \left( x - \frac{g \cos \varphi}{\omega^2} \right) \cos(\omega t + \beta) + y \sin(\omega t + \beta) \\ &= A \cos(\beta - \alpha) + B t, \\ y_1 &= - \left( x - \frac{g \cos \varphi}{\omega^2} \right) \sin(\omega t + \beta) + y \cos(\omega t + \beta) \\ &= A \sin(\beta - \alpha), \\ z_1 &= z = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi + C t + D; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le mobile se déplace, par rapport aux nouveaux axes, suivant une parabole dont l'axe est parallèle à la ligne des pôles; comme d'ailleurs ces axes tournent autour de  $O_1 z_1$  avec une vitesse égale, mais de sens contraire à celle de la Terre, le corps pesant nous semblera se mouvoir sur une parabole tournant autour d'une droite parallèle à son axe de symétrie. C'est la proposition énoncée par Bour.

Si, grâce à la petitesse des déplacements du mobile comparés aux dimensions de la Terre, on peut négliger les variations de l'intensité et de la direction de l'attraction terrestre, il est naturel d'admettre la même approximation pour la force centrifuge et de remplacer les deux forces par leur résultante, la pesanteur, qu'on regardera comme constante et toujours parallèle à  $ZA$ . Les équations du mouvement ne diffèrent des équations (1) que par la suppression des termes  $\omega^2 x$  et  $\omega^2 y$ ;  $g$  y reprend d'ailleurs sa signification ordinaire. Les intégrales ont une forme bien différente de celle que nous avons

trouvée dans l'hypothèse de Bour; rien n'est plus facile que de les trouver et de les mettre sous la forme suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} x = A \cos(2\omega t + \alpha) + B, \\ y = A \sin(2\omega t + \alpha) + C - \frac{g \cos \varphi}{2\omega} t, \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi + E t + F. \end{cases}$$

Si l'on faisait abstraction des termes en  $\sin(2\omega t + \alpha)$  et  $\cos(2\omega t + \alpha)$ , on aurait une trajectoire parabolique; d'ailleurs ces termes eux-mêmes correspondraient à un mouvement circulaire; on voit donc qu'un point pesant, lancé à la surface de la Terre, semble décrire uniformément un cercle parallèle à l'équateur et dont le centre parcourt une parabole ayant son axe parallèle à l'axe du monde. On peut aussi dire que le point se meut sur une parabole animée d'un mouvement de translation circulaire autour d'une parallèle à l'axe du monde, résultat essentiellement différent de celui de Bour. On voit immédiatement que la projection du mobile sur l'équateur décrit une cycloïde ou une trochoïde.

La surface engendrée par un cercle qui se transporte parallèlement à lui-même, de manière que son centre décrive une parabole ayant son axe perpendiculaire au plan du cercle est une surface du quatrième degré; on en aperçoit aisément la forme : il y a, pour ainsi dire, deux nappes qui se coupent suivant un arc parabolique, et se raccordent suivant le cercle dont le centre est au sommet de la parabole directrice; le long de ce cercle, le plan d'une des sections principales passe toujours par l'axe de la parabole directrice et la courbure correspondante varie suivant une loi très simple.

Si l'on donne les coordonnées  $x_0$  et  $z_0$  du point A et les composantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de la vitesse initiale du mobile, on pourra déterminer les constantes qui entrent dans

les intégrales (2), et l'on trouvera

$$(3) \begin{cases} x = x_0 + \frac{a}{2\omega} \sin 2\omega t - \frac{2b\omega + g \cos \varphi}{4\omega^2} (1 - \cos 2\omega t), \\ y = \frac{2b\omega + g \cos \varphi}{4\omega^2} \sin 2\omega t + a \frac{1 - \cos 2\omega t}{2\omega} - \frac{g \cos \varphi}{2\omega} t, \\ z = z_0 + ct - \frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi. \end{cases}$$

Pour que la projection du mobile sur l'équateur décrive une cycloïde proprement dite, il faut qu'on ait

$$(a^2 + b^2)\omega + bg \cos \varphi = 0.$$

On trouverait les coordonnées du mobile relativement aux axes AX, AY, AZ, qui sont les plus commodes pour l'observation, en remarquant qu'on a

$$\begin{aligned} X &= (x - x_0) \sin \varphi - (z - z_0) \cos \varphi, \\ Y &= y, \\ Z &= (x - x_0) \cos \varphi + (z - z_0) \sin \varphi, \end{aligned}$$

et en remplaçant  $x$ ,  $y$ ,  $z$  par leurs valeurs (3); il sera convenable d'exprimer  $a$  et  $c$  en fonction des composantes de la vitesse initiale suivant AX et AZ.

Considérons le cas où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont nuls, c'est-à-dire où le mobile tombe sans vitesse initiale : les équations (3) deviennent

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{g \cos \varphi}{4\omega^2} (1 - \cos 2\omega t), \\ y &= -\frac{g \cos \varphi}{4\omega^2} (2\omega t - \sin 2\omega t), \\ z &= z_0 - \frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi; \end{aligned}$$

la projection sur l'équateur décrit une cycloïde dont la base est parallèle à Oy; le point de départ est le point de rebroussement, et le cercle générateur a pour rayon

$$\frac{g \cos \varphi}{4\omega^2}.$$

On a ensuite

$$X = \frac{1}{2} g \sin \varphi \cos \varphi \left( t^2 - \frac{1 - \cos 2\omega t}{2\omega^2} \right),$$

$$Y = -\frac{g \cos \varphi}{4\omega^2} (2\omega t - \sin 2\omega t),$$

$$Z = -\frac{1}{2} g t^2 \sin^2 \varphi - g \cos^2 \varphi \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2}.$$

On peut développer ces expressions suivant les puissances de  $\omega$  et retrouver les résultats que donne ordinairement l'intégration par approximations successives. Si l'on veut pousser l'approximation un peu loin, la méthode précédente aura un avantage réel. On trouve

$$X = \frac{1}{6} g \omega^2 t^4 \sin \varphi \cos \varphi \left( 1 - \frac{2}{15} \omega^2 t^2 + \frac{1}{105} \omega^4 t^4 - \dots \right),$$

$$Y = -\frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \varphi \left( 1 - \frac{1}{3} \omega^2 t^2 + \frac{2}{105} \omega^4 t^4 - \dots \right),$$

$$Z = -\frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{6} g \omega^2 t^4 \cos^2 \varphi \left( 1 - \frac{2}{15} \omega^2 t^2 + \dots \right).$$

Considérons une hauteur de chute  $h$ ; on a sensiblement

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

puis

$$X = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 h^2}{g} \sin 2\varphi, \quad Y = -\frac{2}{3} \omega \cos \varphi \sqrt{\frac{2h^3}{g}}.$$

Les expériences de Reich, pour

$$h = 158^m, 54, \quad \varphi = 50^\circ 52',$$

indiquaient une déviation vers l'est égale en moyenne à  $0^m, 0284$ , et une déviation vers le sud égale à  $0^m, 0437$  : les formules précédentes donnent pour ces déviations  $0^m, 0275$  et  $0^m, 000004$ ; la première s'accorde très bien avec l'expérience, mais la seconde est en complet désaccord.



Il y a lieu de chercher quelle valeur on trouverait pour la déviation australe en assimilant l'attraction terrestre à celle d'un ellipsoïde homogène et de révolution. Considérons un point pesant qui tombe dans un puits, c'est-à-dire à l'intérieur de la masse attirante : les composantes de l'attraction, proportionnelles, on le sait, aux coordonnées du point attiré, peuvent se représenter par  $-\lambda^2 x$ ,  $-\lambda^2 y$ ,  $-\mu^2 z$  et les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -(\lambda^2 - \omega^2)x - 2\omega \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -(\lambda^2 - \omega^2)y + 2\omega \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\mu^2 z.\end{aligned}$$

On cherche, pour les deux premières, des intégrales de la forme  $x = e^{rt}$ ,  $y = se^{rt}$ ; les valeurs de  $r$  sont imaginaires, mais très simples; la troisième équation s'intègre immédiatement, et l'on peut mettre les intégrales générales du problème sous la forme

$$\begin{aligned}x &= A \cos[(\lambda + \omega)t + \alpha] + B \cos[(\lambda - \omega)t + \beta], \\ y &= A \sin[(\lambda + \omega)t + \alpha] - B \sin[(\lambda - \omega)t + \beta], \\ z &= C \cos(\mu t + \gamma).\end{aligned}$$

Le mouvement défini par ces équations, sous leur forme générale, est compliqué; mais nous nous bornons au cas où la vitesse initiale est nulle, ce qui permet de déterminer les arbitraires. On trouve alors

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_0}{2\lambda} [(\lambda + \omega) \cos(\lambda - \omega)t + (\lambda - \omega) \cos(\lambda + \omega)t], \\ y &= \frac{x_0}{2\lambda} [(\lambda - \omega) \sin(\lambda + \omega)t - (\lambda + \omega) \sin(\lambda - \omega)t], \\ z &= z_0 \cos \mu t.\end{aligned}$$

Pour étudier, pendant les premières secondes de la chute, le mouvement défini par ces équations, je développe  $x - x_0$ ,  $y$ ,  $z - z_0$  suivant les puissances croissantes de  $t$ , en me bornant aux premiers termes des séries, qu'on met aisément sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\frac{\lambda^2 - \omega^2}{2} x_0 \left( t^2 - \frac{\lambda^2 - 3\omega^2}{12} t^4 - \dots \right), \\ y &= \frac{\lambda^2 - \omega^2}{3} x_0 (\omega t^3 - \dots), \\ z - z_0 &= -\frac{1}{2} \mu^2 z_0 \left( t^2 - \frac{1}{12} \mu^2 t^4 - \dots \right). \end{aligned}$$

Remarquons que  $(\lambda^2 - \omega^2) x_0$  et  $\mu^2 z_0$  sont les composantes, parallèles à  $Ox$  et à  $Oz$ , du poids du mobile à son départ; donc

$$(\lambda^2 - \omega^2) x_0 = g \cos \varphi, \quad \mu^2 z_0 = g \sin \varphi,$$

et les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\frac{1}{2} g t^2 \cos \varphi \left[ 1 - \left( \frac{g \cos \varphi}{12 x_0} - \frac{\omega^2}{3} \right) t^2 - \dots \right], \\ y &= \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \varphi - \dots \\ z - z_0 &= -\frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi \left( 1 - \frac{g \sin \varphi}{12 z_0} t^2 - \dots \right). \end{aligned}$$

La valeur de  $y$  nous donne la même déviation orientale que tout à l'heure; pour avoir le mouvement suivant la verticale et la déviation australe, nous déduirons  $X$  et  $Z$  de  $x - x_0$  et de  $z - z_0$  par la transformation déjà employée; il viendra

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{6} g t^4 \sin \varphi \cos \varphi \left( \omega^2 + \frac{g \cos \varphi}{4 x_0} - \frac{g \sin \varphi}{4 z_0} \right) - \dots, \\ Z &= -\frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{6} g t^4 \left( \omega^2 + \frac{g \cos^3 \varphi}{x_0} + \frac{g \sin^3 \varphi}{z_0} \right) - \dots \end{aligned}$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les demi-axes de l'ellipse méridienne,

$e$  son excentricité,  $p$  la distance du centre de la Terre au plan tangent en A;  $\varphi$  étant l'angle de la normale à l'ellipse avec son axe focal, on a

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\cos \varphi}{x_0} - \frac{\sin \varphi}{z_0} = \frac{p}{\alpha^2} - \frac{p}{\beta^2} = -\frac{pe^2}{\beta^2}, \\ X = \frac{1}{12} g t^4 \sin 2\varphi \left( \omega^2 - \frac{1}{4} \frac{pge^2}{\beta^2} \right) + \dots \end{cases}$$

D'ailleurs  $\frac{p}{\beta^2}$  diffère peu de  $\frac{1}{\alpha}$ , et la théorie de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation donne sensiblement  $\frac{ge^2}{\alpha} = \frac{5}{2} \omega^2$ ; enfin, si la hauteur de chute est  $h$ , on pourra dans X remplacer  $t^2$  par  $\frac{2h}{g}$ , et l'on aura pour valeur approchée de la déviation australe

$$X' = \frac{1}{8} \frac{\omega^2 h^2}{g} \sin 2\varphi.$$

Cette valeur n'est que les  $\frac{3}{8}$  de celle que donnait la théorie précédente et est encore plus en désaccord avec la déviation annoncée par Reich. Mais il y a une remarque très importante à faire : à mesure qu'on pénètre dans la Terre en suivant la verticale du point A, la direction de la pesanteur varie; un fil à plomb, attaché en A, prend la direction de la pesanteur à son extrémité inférieure et s'écarte, vers le nord, de la verticale AZ, ce qui augmente la déviation apparente du corps qu'on laisse tomber. Il s'agit de calculer la quantité  $u$  dont l'extrémité d'un fil à plomb de longueur  $h$  s'éloigne au nord de la verticale AZ. Les coordonnées de l'extrémité du fil par rapport à  $AXYZ$  sont

$$X_1 = -u, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = -h,$$

et, par conséquent, les coordonnées relatives à  $Oxyz$

sont

$$x_1 = x_0 - h \cos \varphi - u \sin \varphi, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = z_0 - h \sin \varphi + u \cos \varphi;$$

les composantes de la pesanteur en ce point sont

$$(\lambda^2 - \omega^2)x_1 = \frac{g x_1}{x_0} \cos \varphi, \quad 0, \quad \mu^2 z_1 = \frac{g z_1}{z_0} \sin \varphi.$$

Pour que le fil soit en équilibre, il faut que la première et la troisième de ces composantes soient proportionnelles à  $x_0 - x_1$  et à  $z_0 - z_1$ ; donc

$$\frac{(x_0 - h \cos \varphi - u \sin \varphi) \cos \varphi}{x_0 (h \cos \varphi + u \sin \varphi)} = \frac{(z_0 - h \sin \varphi + u \cos \varphi) \sin \varphi}{z_0 (h \sin \varphi - u \cos \varphi)};$$

chassons les dénominateurs, divisons par  $x_0 z_0$  et ayons égard à la relation (4), nous trouverons

$$\frac{p h^2 e^2}{\beta^2} \sin 2\varphi - 2 \left( 1 + \frac{p h e^2}{\beta^2} \cos 2\varphi \right) u - \frac{p e^2}{\beta^2} u^2 \sin 2\varphi = 0.$$

Cette équation a deux racines, l'une très grande, l'autre très petite; c'est celle-ci qui nous convient; elle a pour valeur approchée

$$u' = \frac{1}{2} \frac{p h^2 e^2}{\beta^2} \sin 2\varphi$$

ou, en remplaçant, comme on l'a déjà fait,  $\frac{p}{\beta^2}$  par  $\frac{1}{\alpha}$  et  $\frac{e^2}{\alpha}$  par  $\frac{5}{2} \frac{\omega^2}{g}$ ,

$$u' = \frac{5}{4} \frac{\omega^2 h^2}{g} \sin 2\varphi.$$

Telle est la quantité dont le fil à plomb dévie au nord de la verticale du point A; la déviation apparente du corps qu'on a laissé tomber devrait donc être égale à

$$u' + X' = \frac{11}{8} \frac{\omega^2 h^2}{g} \sin 2\varphi;$$

c'est plus de quatre fois la valeur trouvée en regardant comme constante la direction de la pesanteur, mais, dans les conditions où Reich a fait ses expériences, cela ne

donnerait encore que  $0^m,000017$  de déviation australe, et l'on peut s'assurer que la résistance de l'air au mouvement du corps qui tombe modifie très peu ce résultat. On est encore bien loin de la déviation annoncée par Reich, et il faut en conclure ou que cette déviation tenait à des circonstances locales, ou, ce qui est plus probable, que les expériences n'étaient pas suffisamment exactes, et que les physiciens auraient intérêt à les reprendre dans des puits profonds, comme les y invite M. Gilbert.

Venons enfin au mouvement d'un point pesant lancé dans l'atmosphère; il est facile d'en écrire les équations différentielles sous forme explicite, puisqu'on sait exprimer en quantités finies les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde planétaire sur un point extérieur; mais ces équations ne sont plus linéaires, et leur intégration est difficile. On trouverait des intégrales approchées en développant en séries les composantes de l'attraction; mais, si l'on veut se borner à une première approximation, il est bien plus simple d'évaluer directement la partie principale des variations que le déplacement du mobile fait éprouver aux composantes de la pesanteur. Considérons les coordonnées  $X, Y, Z$ , et appelons  $R$  le rayon moyen de la Terre; si l'on commet une erreur sensible en regardant la pesanteur comme dirigée vers le centre du globe et inversement proportionnelle au carré de la distance à ce centre, l'erreur devient négligeable quand on adopte cette hypothèse pour calculer les variations de la pesanteur; les composantes parallèles à  $AX$  et à  $AY$ , nulles en  $A$ , seront, pour une position différente,  $-\frac{gX}{R}$ ,  $-\frac{gY}{R}$ ; la composante parallèle à  $AZ$  sera approximativement

$$-\frac{gR^2}{(R+Z)^2} \quad \text{ou} \quad -g + \frac{2gZ}{R};$$

les équations du mouvement deviennent alors

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dt^2} &= -g \frac{X}{R} - 2\omega \sin \varphi \frac{dY}{dt}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= -g \frac{Y}{R} + 2\omega \left( \cos \varphi \frac{dZ}{dt} + \sin \varphi \frac{dX}{dt} \right), \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= -g + \frac{2g}{R} Z - 2\omega \cos \varphi \frac{dY}{dt}.\end{aligned}$$

Intégrons par approximations successives : si nous négligeons d'abord les termes en  $u$  et en  $\frac{g}{R}$ , nous aurons

$$X = A t, \quad Y = B t, \quad Z = C t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Une seconde approximation nous donnera

$$\begin{aligned}X &= A t - B \omega t^2 \sin \varphi - \frac{1}{6} \frac{A g}{R} t^3, \\ Y &= B t + (A \sin \varphi + C \cos \varphi) \omega t^2 - \frac{1}{6} \left( 2\omega \cos \varphi + \frac{B}{R} \right) t^3, \\ Z &= C t - \frac{1}{2} g t^2 - B \omega t^2 \cos \varphi + \frac{1}{3} \frac{C g}{R} t^3 - \frac{1}{12} \frac{g^2}{R} t^4.\end{aligned}$$

Il n'y a pas lieu de pousser l'approximation plus loin ; les expressions précédentes suffisent pour faire apprécier l'influence de la rotation diurne et des variations de la pesanteur ; pour des vérifications expérimentales, il faudrait avoir égard à la résistance de l'air qui joue un grand rôle, mais dont la considération nous éloignerait de l'objet de cet article.